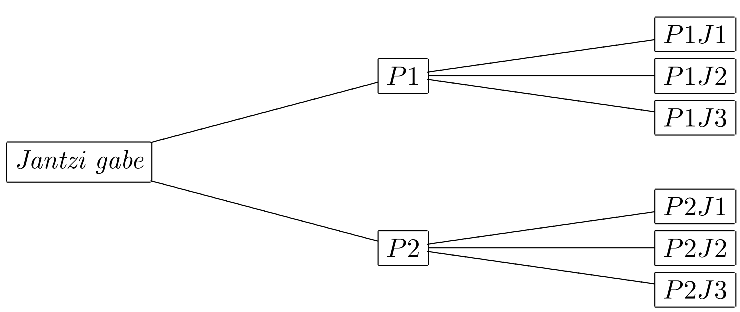
1. gaia: Probabilitate-kalkulua

1.0 Eranskina: konbinatoria

Konbinatoria zenbaketa-problemak ebazten dituzten teknika matematikoen multzoa da. Adibidez, 10 pertsonako talde batean zenbat bikote ezberdin osa daitezke? Hiru zifrako zenbat zenbaki osa daitezke 1, 2, 3 eta 4 zenbakiekin? Zenbat eratara ordena daitezke SARASOLA hitzaren letrak? Aurrekoak bezalako galderak erantzuteko erabiltzen da konbinatoria. Probabilitatea ikasi ahal izateko aurrekari bezala ikasi behar dugu, probabilitateak egitean maiz zenbaketak egin behar direlako.

1.0.1 Biderketa erregela

Konbinatoriaren oinarrizko erregela bat, konbinatoria-formula askoren oinarrian dagoena **biderketa-erregela** da. Honela dio: *gauza bat m eratara eta beste bat n eratara egin daitezkeelarik, biak batera $m \times n$ eratara egin daitezke.*



Irudia 1.1: **Biderketa-erregela**: 2 praka (P1, P2) eta 3 jertse (J1, J2, J3) edukita, $2 \times 3 = 6$ eratara jantzi naiteke, **zuhaitz-diagramak** erakusten duen bezala.

1.0.2 Aukeraketa-problemak: aldakuntzak eta konbinazioak

Konbinatorian maiz kalkulatu behar dira zenbat multzo osatu diren, k elementukoak, guztira aukeran dauden elementuak n direlarik. Adibidez, a, b, c eta d letrak aukeran direlarik, zenbat 2-kote osa daitezke?

a, b, c, d elementuekin sor daitezkeen 2-koteak	Ordena bai	Ordena ez
Errepikapena ez	**Aldakuntza arruntak**: ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc	**Konbinazio arruntak**: ab, ac, ad, bc, bd, cd
Errepikapena bai	**Errepikatuzko aldakuntzak**: ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc aa, bb, cc, dd	**Multikonbinazioak**: ab, ac, ad, bc, bd, cd aa, bb, cc, dd

Zenbaketa-modu desberdinak daude, beraz, elementuak errepikatu eta ordena kontuan hartzen den ala ez. Horrela, lau zenbaketa-modu desberdin ditugu, gauza desberdinak zenbatzen ditugulako haietan: aldakuntza arruntak, konbinazio arruntak, errepikatuzko aldakuntzak edo multikonbinazioak.

Zenbaketa-modu bakoitzari bere formula dagokio. Aukeran dagoen elementukopuruari n izanik, zenbaketa-modu horiek ematen dituzten k tamainako multzokopuruak honela adierazi eta kalkulatzen dira:

- **aldakuntza arruntak**

  $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **errepikatuzko aldakuntzak**

  $$EA_n^k = n^k$$

- **konbinazioak**[1]

  $$K_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **multikonbinazioak** edo **errepikatuzko konbinazioak**

  $$EK_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

[1] $\binom{n}{k}$ balioei zenbaki konbinatorio edo koefiziente binomial deritze. Kalkulu-adibide moduan, $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$. Badira zenbaki konbinatorioen balio jakingarri batzuk: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ eta $\binom{n}{1} = n$. Gainera hau betetzen da: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$; adibidez, $\binom{10}{2} = \binom{10}{8}$. Kalkulurako trikimailu moduan, hau erabil daiteke: $\binom{8}{2} = \frac{8\times 7}{2!} = 28$, hau da, goiko zenbakia *beheraka* bidertzen da, beheko zenbakia adina aldiz, eta zatitzailean beheko zenbakiaren faktoriala kalkulatzen da. Ariketa moduan, kalkulatu: $\binom{10}{4}$.

Hausnartu: a, b, c eta d letrak aukeran direlarik, zenbat 2-kote osa daitezke? Erabili horretarako konbinatoriako formulak.

Dakigunez (ikusi arestiko adibidea, non kopuruak banan-banan zenbatuz eman diren), ordena kontuan hartzen den eta elementuak errepika daitezkeen ala ez, halakoa izango da erantzuna.

Ordena kontuan hartuz eta elementuak errepikatu gabe, aldakuntza arrunten formula behar dugu:

$$A_{n=4}^{k=2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

Ordena kontuan hartuz eta elementuak errepikatuz, berriz, errepikatuzko aldakuntzen formula darabilgu:

$$EA_{n=4}^{k=2} = 4^2 = 16$$

Ordena kontuan hartu gabe eta elementuak errepikatu gabe, konbinazioen kopurua hau da:

$$K_{n=4}^{k=2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Azkenik, ordena kontuan hartu gabe eta elementuak errepikatuz, multikonbinazioak ditugu:

$$EK_{n=4}^{k=2} = \binom{4+2-1}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

1.0.3 Ordenatze-problemak: permutazioak

n elementu *ezberdin* ordenatzeko era-kopurua hau da:

$$P_n = n!$$

Ordenatze bakoitzari *permutazio* deritzo. Adibidez, x-y-z letrak ordenatzeko era kopurua, ezberdinak direla ikusita, $3! = 6$ da (xyz,xzy,yxz,yzx,zxy,zyx).

Ordenatu beharreko elementuak *errepikatu* egiten direnean, *errepikatuzko permutazioak* honela kalkulatzen dira, $a, b, ...$ errepikapenen kopurua izanik:

$$EP_n^{a,b,\ldots} = \frac{n!}{a!b!\ldots}$$

Adibidez, x-x-x-y-y-z letren permutazioen kopurua hau da:

$$EP_6^{3,2,1,} = \frac{6!}{3!2!1!}$$

1.0.4 Ariketak: konbinatoria

1. Zenbat eratara burutu daitezke 3 ataza denbora zehar bata bestearen ondoren? Zerrenda osatu. Eta 4 ataza? Eta 5 ataza? Eta 10 ataza?
2. 4 lanegun eta 2 jaiegun programatu behar ditu langile batek hurrengo sei egunetarako. Zenbat eratara egin daiteke?
3. 6 lankide dituen denda batean, bi aukeratu behar dira larunbatean lan egiteko. Zenbat eratara egin daiteke? Zerrenda osatu.
4. 8 pertsonetatik presidentea, presidenteordea eta idazkaria aukeratu behar dira. Zenbat eratara osa daiteke hirukotea?
5. Lantegi batean 6 langile ari dira. 4 ataza ezberdin burutu behar dira. Langile batek ataza bat baino gehiago ahal badu egin, zenbat eratara egin daiteke esleipena? Eta langileek ataza bat soilik ahal badute egin? Langileak bereizi egin behar direla hartu behar da kontuan.
6. Enpresa batek oparitarako delicatessen produktuen kaxak prestatzen ditu. Produktuak bi sailetan banatu ditu: handiak eta txikiak. Aukeran 4 produktu handi eta 6 txiki baditu, zenbat kaxa ezberdin presta daitezke, bakoitzetik bi produktu aukeratu behar badira?
7. Zenbat eratara aukera daiteke 10 lagunetatik 2 laguneko batzorde bat, ordena kontuan hartu gabe, bi lagunek elkarrekin parte hartzea ukatzen badute? Eta batzordea 3 lagunek osatu behar badute? Eta batzordea 4 lagunek osatu behar badute?
8. Katalogo bateko produktuei erreferentzia bana emateko 3 letra desberdineko kodeak erabili nahi dira. 3200 produktu desberdin badaude, aukeran zenbat letra egon behar dira guztira gutxienez?

1.1 Probabilitate-kontzeptua

Probabilitatea gertakizun baten gertagarritasuna (alderantziz, ziurgabetasuna) neurtzen duen zenbaki bat da. [0, 1] tarteko balioak hartzen ditu ([%0, %100], ehunekotan adierazten denean). 1 baliotik zenbat eta gertuago izan, gertakizuna orduan eta gertagarriagoa edo ziurragoa izango da, eta 0tik zenbat eta gertuago, orduan eta ziurgabeagoa. Gertakizun baten probabilitatea 1 denean, gertakizuna ziurra dela esaten da, erabateko ziurtasunez gauzatu edo egiaztatuko dela pentsatzen baita. Probabilitatea 0 denean, gertakizuna ezinezkoa dela esaten da. Tarte horretan, 1 baliotik gertuko probabilitatea duten gertakizunak *gertagarriak* edo probableak direla esaten da; 0 probabilitatetik gertu dauden gertakizunak, berriz, *gertagaitzak* edo inprobableak direla esaten da. Adierazpenari dagokionean, honela idazten da A gertakizunaren probabilitatea: $P(A)$.

Probabilitatea *zorizko* fenomenoak aztertzeko erabiltzen da. Adibidez, txanpon bat botatzen denean, ez dago jakiterik zer alde erakutsiko duen eta horrela txanpon bat bota eta gurutzeko suertatzeko probabilitatea %50 dela esaten da. Inondik ere zoriz gertatzen ez diren fenomenoak, berriz, *deterministak* direla esaten da, eta probabilitate-teoriatik kanpo geratzen dira (adibidez, eskuan dugun zerbait askatzen dugunean, lurrean jausiko da guztiz ziur). Fenomeno gehienak tartekoak dira, kausa jakina dutenak baina aldi berean aldakortasuna dutenak, erabateko ziurgabetasunera heldu gabe.

1.2 Probabilitatearen ikuspegiak

Probabilitatea ikuspegi desberdinetatik aztertu eta kalkula daiteke.

1.2.1 Ikuspegi klasikoa: Laplaceren erregela

Probabilitatearen interpretazio klasikoak zorizko fenomeno baten emaitza posible guztiak probabilitate berekoak izan behar direla ezartzen du. Interpretazio horren arabera, A gertakizun baten probabilitatea A gertatzen deneko emaitza guztien proportzioa da, *lagin espazio* edo emaitza posible guztien kopuruari buruz, *aldeko emaitzen kopurua / emaitza posible guztien kopurua* alegia. Adibidez, dadoa botata, zenbaki bikoitia suertatzeko probabilitatea honela kalkulatzen da:

$$P[bikoitia] = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Jardunbide hau baliatuko da emaitza posible guztiek suertatzeko probabilitate edo aukera berdinak izan behar dituztenean. Errealitatean, ordea, egoera bati buruz gerta daitezkeen emaitzak ez dira probabilitate berekoak izaten edota nekeza da probabilitate bereko emaitzetara murriztea. Horrela, bere aplikazioarloa zoria erabatekoa den kasuetara mugatzen da, hala nola zori-jokoetan, non konbinazio guztiak probabilitate berekoak diren, jokoaren berdintasuna bermatzeko. Maiz, emaitzen kopuruakkalkulatzeko konbinatoriako formulak baliatu behar dira.

1.2.2 Ikuspegi frekuentziala

Ikuspegi frekuentzialaren arabera, probabilitatea gertakizunaren aldeko kasuen proportzioa edo maiztasun erlatiboa izango da, aztertzen den fenomenoaren emaitzak aldi askotan zehar jasoz, esperimentatuz edo errealitatetik zuzenean datuak bilduz. Adibidez, dadoaren emaitza bikoitia izateko probabilitatea emateko, dadoa 1000 aldiz bota eta horietatik 520 alditan bikoitia suertatu bada, emaitza bikoitia izateko probabilitatea 520/1000=0.52 dela adieraz daiteke.

Horrela kalkulatuta, probabilitatearen balioa *zenbatespen* edo estimazio bat izango da betiere, hurbilketa bat, baina zenbat eta aldi gehiagotan bota orduan eta fidagarriagoa. Zuzena izan dadin, saiakuntzak beti *egoera homogeneoetan errepikatu behar dira.* Hala ere, datuen fidagarritasuna ez da erabatekoa izaten, izaten baitira faktore kontrolaezinak eta neurketa-erroreak. Gainera, egoera homogeneoetan errepika ezin daitezkeen gertaerak ere badaude: talde batek futbol-partidu jakin bat irabazteko probabilitatea zenbatesteko, ezin da partidu berdina behin eta berriz kondizio berdinetan, jokalari berdinekin eta abar, errepikatu. Muturrean, *kasu bakarreko oztopoa* izenekoa sortzen da; adibidez, Anek estatistika gainditzeko probabilitatea kalkulatu nahi dugunean, Anek egin behar duen azterketa bakarra delako.

Abantaila moduan, aipatu behar da interpretazio klasikoa baliatu ezin daitekeen egoera askotan erabil daitekeela; adibidez oker eginda dagoen dado bateko probabilitateak kalkulatzeko, interpretazio klasikoa desegokia da, alde guztiek ez baitute probabilitate berdina eta ondorioz, irtenbide gisa dadoarekin esperimentatzea besterik ez da geratzen emaitza bakoitzaren probabilitatea zenbatesteko. Beste batzuetan, Laplace-ren erregelarekin batera erabil daiteke (adibidez, txanpon bat aurpegikoa suertatzeko probabilitatea kalkulatzeko), probabilitate ezberdinak emango dituzten arren, probabilitate frekuentziala hurbilketa delako betiere.

1.2.3 Ikuspegi subjektiboa

Interpretazio subjektibotik, probabilitatea gertakizun baten gauzatzeari buruzko sinesmen-maila edo estimazio subjektibo bat da, gertakizunaren aldeko eta aurkako faktoreak kontutan hartuz, pertsona arrazional edo zentzudun baten aldetik. Bereziki esperimentazioa eta datu bilketa ezinezkoak diren kasuetan erabiltzen da, hala nola kasu bakarreko egoeretan. Adibidez, futbol-talde batek hurrengo partidua irabazteko probabilitatea finkatzean, pertsona batek partiduaren emaitza eragiten duten faktore guztiak aztertu eta neurtzen dituenean (jokatuko duten jokalariak, aurkaria zein den, azken partiduetako joera, ...), azkenean irabazteko probabilitatea 0.7 dela estimatzeko. Era berean emango genituzke pertsona jakin batek hurrengo estatistika azterketa gainditzeko probabilitatea, non pertsona horrek ikasi duen eta abar aztertu berharko den, zein datorren urtean BPGa igotzeko probabilitatea, non hazkuntza ekonomikoan eragina duten faktoreak aztertu beharko diren.

1.2.4 Ariketak: Laplaceren erregela

1. Lau bezerori bidali beharreko pakete desberdin bana bidali behar zaie, baina nahastu direnez, ez dakigu zein bidali behar zaion bakoitzari. Zoriz egiten bada bidalketa, zenbatekoa da bezeroei behar bezala bidaltzeko probabilitatea?
2. Mezulari batek lau gutun entregatu behar ditu. Zoriz aukeratzen du ibilbidea.
   (a) Zenbat da lehenbizi gertuen dagoen etxera joateko probabilitatea?
   (b) Eta A gutuna B gutuna baino justu lehenago entregatzeko probabilitatea?
3. **Ontzi-problema**. Ontzi batean 12 pieza akasgabe eta 4 pieza akastun

daude. 4 pieza ateratzen dira batera (edo itzulerarik gabe).

(a) Zenbatekoa da denak akasgabeak izateko probabilitatea?

(b) Eta 3 akasgabe izatekoa?

(c) Zein da probabilitate handieneko gertakizuna? Zergatik?

4. **Ontzi-problema**. Talde batean 6 emakume eta 8 gizon daude. 4 pertsona aukeratu behar dira zoriz batera.

   (a) Zenbatekoa da denak emakume izateko probabilitatea?

   (b) Zenbat da aukeratutako taldean Ane eta Miren izateko probabilitatea?

   (c) Eta 2 emakume eta 2 gizon izateko probabilitatea?

   (d) Eta 2 emakume eta 2 gizon izateko probabilitatea taldera beste sei gizon biltzen badira?

5. **Ontzi-problema**. Kaxa batean A, B eta C motako 6, 8 eta 10 pieza daude. Zenbatekoa da 6 pieza batera aterata, A, B eta C motako 3, 2 eta 1 pieza suertatzeko probabilitatea? Eta A motako 5 pieza ateratzeko probabilitatea?

6. Hotel batean, gau bakarreko lau erreserba daude hurrengo asterako, eguna zehaztu gabe. Zenbatekoa da denak egun ezberdinetan suertatzeko probabilitatea?

7. Supermerkatu batean 5 ilara daude. Bezeroak zoriz aukeratzen du ilara bat. Zenbat da azken 3 bezeroetatik gutxienez 2 bezero A ilaran suertatzeko probabilitatea?

1.3 Gertakizunen aljebra eta probabilitatea

Zorizko fenomeno baten emaitzak edo gertakizun sinpleak elkarrekin konbinatu eta gertakizun konplexuak era ditzakete. Gertakizun-aljebrari esker, gertakizun konplexu horien probabilitateak kalkulatzen ikasi behar dugu.

1.3.1 Lagin-espazioa

Lagin-espazioa, **unibertso** ere deitzen dena, zorizko fenomeno baten emaitza gertagarri edo gertakizun sinple guztien multzoa da. Ω (omega maiuskula) letra grekoarekin adierazten da. Adibidez, dadoa botata:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Lagin-espazioak *dena* biltzen duenez, ziurra da horko zerbait gertatzea. Horregatik **gertakizun ziurra** ere deitzen zaio eta honela adierazten da:

$$P(\Omega) = 1$$

Beste muturrean, **gertakizun ezinezkoaren probabilitatea** honela adierazten da:

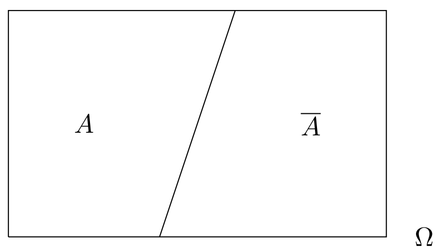
$$P(\emptyset) = 0$$

1.3.2 Gertakizun osagarriak

Bi gertakizun **osagarriak** edo **aurkakoak**[2] bata gertatzen ez delarik, bestea gertatzea dakarten horiek dira. Adibidez, gizon eta emakume aurkako gertakizunak dira; pertsona bat emakumea ez denean, gizona delako hain zuzen. Gertakizun osagarriak A eta $\overline{A}$ adierazten dira.

Gertakizun osagarriei buruz, oinarrizko probabilitate-erregela hau betetzen da:

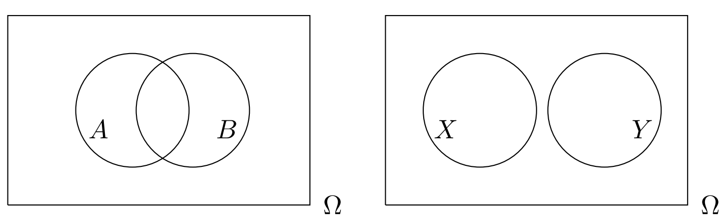
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



Irudia 1.2: A eta $\overline{A}$ gertakizun osagarriak dira.

1.3.3 Gertakizun bateragarriak eta bateraezinak

Bi gertakizun **bateragarriak**[3] direla esaten da, biak batera gerta daitezkeenean. Batera gerta ezin direnean, **bateraezinak**[4] direla esaten da.



Irudia 1.3: A eta B (ezkerrean) gertakizun bateragarriak dira.
X eta Y (eskuinean) bateraezinak dira.

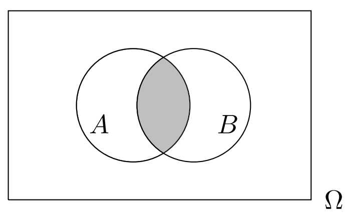
[2] Ingelesez, *complementary events*.
[3] Ingelesez, *not mutually exclusive events*.
[4] Ingelesez, *mutually exclusive events*.

Adibidez, inkesta batean *gizona* eta *begetarianoa* suertatzea bateragarriak dira, baina *gizona* eta *tanpoiak erabiltzea* bateraezinak.

Hausnartu: Bi gertakizun osagarriak badira, nolakoak dira: bateragarriak ala bateraezinak? Eta bateraezinak badira, aurkakoak al dira?

1.3.4 Gertakizunen ebaketa

A eta B gertakizunen **ebaketak**[5], $A \cap B$ adierazi eta *A eta B* zein *A ebaki B* esaten denak, A eta B *batera* gertatzea adierazten du. Gertakizunen ebaketari gertakizun konposatua ere deitzen zaio. Adibidez, *A: gizona* eta *B: begetarianoa* izanik, $A \cap B$ gertakizun konposatuak *gizon begetarianoak* biltzen ditu.

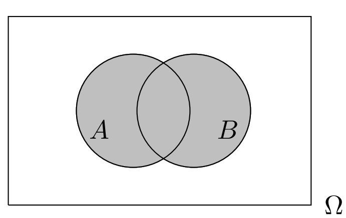


Irudia 1.4: $A \cap B$ (grisez): A eta B gertakizunen **ebaketa**

Hausnartu: Bi gertakizun bateraezinak badira, nolakoa da bien arteko ebaketa? Zenbat balio du horren probabilitateak?

1.3.5 Gertakizunen bilketa

A eta B gertakizunen **bilketak**[6], $A \cup B$ adierazi eta *A edo B* zein *A bil B* esaten denak, *A, B edo A eta B batera* gertatzea adierazten du, *bietako bat gutxienez* gertatzea alegia Adibidez, *A: gizona* eta *B: begetarianoa* izanik, $A \cup B$ gertakizunak *gizon ez begetarianoak*, *emakume begetarianoak* eta *gizon begetarianoak* biltzen ditu.



Irudia 1.5: $A \cup B$ (grisez): A eta B gertakizunen **bilketa**

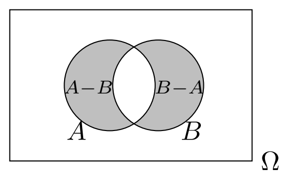
[5] Ingelesez, *intersection*.
[6] Ingelesez, *union*.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ gertakizunak bateraezinak badira, honela kalkulatzen da horien bilketaren probabilitatea:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

1.3.6 Gertakizunen kenketa

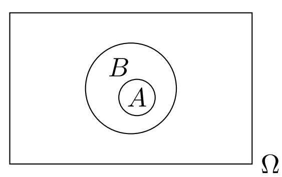
A eta B gertakizunen **kenketak**[7], $A - B$ adierazi eta A *ken* B esaten denak, A bai baina B ez gertatzea adierazten du. Adibidez, *A: gizona* eta *B: begetarianoa* izanik, $A - B$ gertakizunak *gizon ez begetarianoak* biltzen ditu.



Irudia 1.6: $A - B$ (A bai, baina B ez) eta $B - A$ (B bai, baina A ez) gertakizunak.

1.3.7 Barnekotasuna

A gertakizuna B-ren barnean dagoela esaten da, eta $A \subset B$ adierazi, B gertatzen den guztietan A gertatzen bada, baina A gertatzen den guztietan B gertatzen ez denean. Hala denean, hau ziurta daiteke: $P(A) \leq P(B)$.



Irudia 1.7: $A \subset B$: A B-ren barnean dago.

Hausnartu: A B-ren barnean badago, zenbat da $A \cap B$? Eta $A \cup B$?

1.3.8 De Morgan-en legeak

De Morgan-en legeek honako hauek adierazten dituzte:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

[7] Ingelesez, *subtraction*.

1.3.9 Inklusio-esklusio erregela

Inklusio-esklusio erregela gertakizunen bilketa baten probabilitatea kalkulatzeko erabiltzen da. A eta B bi gertakizunetarako honela dio:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A, B eta C hiru gertakizunetarako:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Orokorrean, $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n$ gertakizunetarako:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) \\ & - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \ldots \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Hau da, bilketa baten probabilitatea kalkulatzeko banakako gertakizunen probabilitateak gehitu, binakako ebaketa guztien probabilitateak kendu, hirunakakoak gehitu, launakakoak kendu eta abar egin behar da, gertakizun guztien ebaketara heldu arte.

Bilketako gertakizun guztiak bateraezinak direnean, ebaketa guztien probabilitateak 0 dira, eta beraz aurreko formula honela geratzen dela, aurreko atal batean aurreratu genuen bezala:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

1.4 Ariketak: Gertakizunen aljebra

1. Herri batean 345 lagun bizi dira. Horietatik 123 lagunek Aneren okindegian erosten dute ogia. Beatrizen okindegian, berriz, 102 lagunek erosten dute. Gainerakoek 120 lagunek etxean egiten dute ogia. Adieraz ezazu gertakizun aljebraren ikurrak erabiliz ogia okindegian erosteko probabilitatea eta kalkulatu ezazu. *Idem* ogia etxean egiteko probabilitatearekin.
2. Biltzar batera gaztelaniaz bakarrik dakiten 40 lagun eta frantsesez bakarrik dakiten 20 bildu dira. Zenbatekoa da bi lagun zoriz aukeraturik elkar ulertzeko probabilitatea?
3. Azken astean plazaratutako A eta B bi filmak ikusi duten galdetuz, inkesta bat egin da herri bateko biztanleen artean. Jasotako datuetan oinarriturik, kontingentzia-taula hau eratu da:

Ikusitako filma	A ikusi du	A ez du ikusi	Guztira
B ikusi	61	84	145
B ez ikusi	109	112	221
Guztira	170	196	366

Datu horietan oinarriturik, zenbatekoa da zoriz aukeraturiko pertsona batek bi filmetako bat gutxienez ikusteko probabilitatea?

4. Bihar euria egiteko probabilitatea 0.8 da. Etzi euria egiteko probabilitatea 0.6 da eta hurrengo bi egunetan euria egiteko probabilitatea 0.5 da.
   (a) Zenbatekoa da gutxienez egun batean euria egiteko probabilitatea?
   (b) Zenbatekoa hurrengo bi egunetan euririk ez egiteko probabilitatea?
5. Produktu batean A eta B akats motak izan daitezke, 0.04 eta 0.11ko probabilitateaz hurrenik hurren. Bi akatsak batera 0.01eko probabilitateaz agertzen dira.
   (a) Zenbatekoa da produktu batek akatsik ez izateko probabilitatea?
   (b) Zenbatekoa da produktu batek akats bakar bat izateko probabilitatea?
6. Bitez A eta B gertakizunak. Gertakizunen aljebraren ikurrak erabiliz, gertakizun konplexu hauek adierazi behar dira:
   (a) bi gertakizunak batera ez dira gertatzen,
   (b) bi gertakizunetako bat gutxienez gertatzen da,
   (c) bi gertakizunetako bat bakarrik gertatzen da.

   C gertakizuna definitu da, aurreko biekin batera. Adierazi gertakizun-aljebraren ikurrekin:
   (d) A bakarrik gertatzen da,
   (e) gutxienez bat gertatzen da,
   (f) hiru gertakizunak batera gertatzen dira,
   (g) A eta B gertatzen dira, baina ez C,
   (h) gutxienez bi gertakizun gertatzen dira,
   (i) ez da batere gertatzen.
7. Ontzi batean 12 pieza akastun eta 46 pieza akasgabe daude. Zenbatekoa da 4 pieza zoriz hartuta gutxienez 2 pieza akasgabe suertatzeko probabilitatea?

8. Gela batean datu hauek jaso dira:

Ikaslea	Matematika	Geografia	Biologia	Hizkuntza
A	5.6	3.6	4.0	8.2
B	3.2	6.4	5.6	4.6
C	2.2	3.4	3.4	4.0
D	8.2	8.6	9.7	9.2
E	7.2	4.5	6.4	7.0
F	2.2	5.4	6.6	4.3
G	6.8	5.3	3.9	4.1
H	8.2	7.6	4.4	8.3
I	4.2	5.5	7.5	6.8
J	7.6	8.0	3.3	5.4
K	6.2	8.5	3.5	4.8
L	3.6	3.9	6.5	6.9
M	4.2	3.5	4.5	5.2
N	4.2	5.5	2.3	4.0

Kodetze hau erabili behar da: MB: matematika gainditu bai; HE:hizkuntza gainditu ez, ... Ondorengo probabilitateak kalkulatu:

(a) P(MB eta BB)

(b) P(ME edo HB), inklusio-esklusio erregela erabiliz

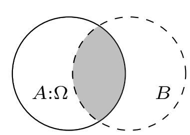
(c) P(MB edo GB edo BE), inklusio-esklusio erregela erabiliz. Zein da aurreko probabilitatea kalkulatzeko barnehartzen ez den ikaslea?

9. Poltsa batean A, B eta C motako 10, 20 eta 30 pieza daude, hurrenik hurren. Pieza bi hartzen badira zoriz, zenbatekoa da denak mota berekoak izateko probabilitatea?

1.4.1 Baldintzapeko probabilitatea

$P(B/A)$ eran adierazten da A izan dela jakinda Bren probabilitate baldintzatua. Honela kalkula daiteke:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Irudia 1.8: A gertatu dela jakinda, unibertsoa A-ren eremura mugatzen da. Unibertso horretan B gertatzeko probabilitatea, $P(B/A)$ alegia, A-ren barruan B gertakizunak hartzen duen azalera da, $P(A \cap B)$ alegia, baina $P(A)$ probabilitatearekiko.

1.5 Probabilitate konposatua: biderketa-erregela

Biderketa-erregelak probabilitate konposatua, ebaketa baten probabilitatea alegia, nola kalkulatzen den ezartzen du, baldintzapeko probabilitatearen formulatik eratorrita:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

Adibidea: 18-30 urteko gazteen artean sexua eta begetarianoak diren jaso dira. Emaitzak taula honetan bildu dira:

	Begetarianoa al da?		Guztira
Sexua	Bai	Ez	
Gizona	25	20	45
Emakumea	40	15	55
Guztira	65	35	100

1. Zenbat da pertsona bat emakumea dela jakinda, begetarianoa izateko probabilitatea?
2. Zenbat da zoriz aukeraturiko pertsona bat gizona eta begetarianoa izateko probabilitatea?

Orokorrean, n gertakizunen ebaketa kalkulatzeko:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) =& P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \\ & \ldots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Beraz, ebaketa baten probabilitatea kalkulatzeko, ebakigai diren gertakizunen probabilitateak *bidertu* egiten dira, aurreko gertakizun guztiak kontuan hartuz aldi bakoitzean. Erosoena biderketa gertakizunak gertatzen diren ordena kronologikoan egitea da.

1.6 Independentzia eta dependentzia

A eta B gertakizunak elkarrekiko independenteak edo askeak dira, bata gertatu dela jakiteak bestea gertatzeari buruz informaziorik ematen ez duenean. Hots, A eta B independenteak izanik:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(A) \times P(B)$$

Beraz, gertakizunak independenteak direnean, horien ebaketaren probabilitateak kalkulatzeko, aski da horien probabilitate bakunak bidertzea, baldintzak edo aurretik gertatutakoa kontuan hartu gabe.

1.6.1 Dependentzia: itzulerarik gabeko zorizko laginketa

Adibidea: Ontzi batean 6 pieza akasgabe eta 4 pieza akastun daude. Zenbat da, bi pieza zoriz eta itzulerarik gabe erauzirik, biak akasgabeak izateko probabilitatea?

$$P[1o \cap 2o] = P[1o] \times P[2o/1o] = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}$$

Itzulerarik gabeko laginketa egiten denean, *dependentzia* dago ateratako elementuen artean, aurreko elementuak nolakoak diren, hurrengoak mota batekoak edo bestekoak izateko probabilitateak aldatu egiten baitira erauzketa batetik bestera, arestian ikusten denez.

1.6.2 Independentzia: zorizko laginketa itzuleraduna

Adibidea: Ontzi batean 6 pieza akasgabe (x) eta 4 pieza akastun (o) daude. Zenbat da, bi pieza zoriz eta itzuleraz erauzirik, biak akasgabeak izateko probabilitatea?

$$P[1o \cap 2o] = P[1o] \times P[2o] = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10}$$

Laginketa itzuleraz egiten denean, *independentzia* dago ateratako elementuen artean, aurreko elementuak nolakoak diren, hurrengoak mota batekoak edo bestekoak izateko probabilitateak ez baitira aldatzen erauzketa batetik bestera.

1.7 Ariketak: Probabilitate konposatua. Dependentzia eta independentzia.

1. Ontzi batean 22 pieza akasgabe eta 7 pieza akastun daude. Zoriz 4 pieza erauzten dira, itzulerarik gabe.
   (a) Zenbatekoa da denak akasgabe izateko probabilitatea?
   (b) Zenbatekoa da lehenengo hirurak akasgabe eta azkenekoa akastun izateko probabilitatea?
   (c) Zenbatekoa da lau piezetatik hiru akasgabe eta akastun bat izateko probabilitatea?
   (d) Zenbatekoa da lau piezetatik bi akasgabe eta bi akastun izateko probabilitatea?
2. Ontzi batean 12 pieza akasgabe eta 4 pieza akastun daude. 6 pieza ateratzen badira zoriz eta itzulerarik gabe, zenbatekoa da 2 akastun edo gutxiago izateko probabilitatea?
3. Herri batean 200 gizon eta 300 emakume daude. 5 pertsonako lagin bat osatu behar da zoriz.

(a) Zenbatekoa da populazioko proportzioa suertatzeko probabilitatea? Kalkuluak zorizko laginketa itzuleradunaz nahiz itzulerarik gabekoaz burutu.

(b) Zenbatekoa da itzulerarik gabeko laginean gizon bakarra suertatzeko probabilitatea? Alderatu aurreko probabilitatearekin.

(c) Zenbatekoa gutxienez gizon bakarra suertatzeko probabilitatea? Zorizko laginketa itzuleradunaz nahiz itzulerarik gabekoaz burutu.

4. Enpresa batek erabateko independentziaz ekoizten du egun batetik bestera. 1, 2 eta 3, 4 ekoizteko probabilitateak 0.1, 0.2, 0.3 eta 0.4 badira hurrenik hurren. Kalkulatu 5 egunetan zehar:

   (a) Lehenengo bi egunetan 2 baino gehiago eta besteetan 2 edo gutxiago ekoizteko probabilitatea.

   (b) Bi egunetan soilik 1 ekoizteko probabilitatea

   (c) Beti ekoizpen berdina izateko probabilitatea.

   (d) Beti 3 edo gutxiago ekoizteko probabilitatea.

   (e) Gutxienez egun batean 4 ekoizteko probabilitatea.

5. Akzio baten kotizazioa 0.4ko probabilitateaz igotzen da, bezperan igo bada eta 0.7 probabilitateaz, bezperan jaitsi bada.

   (a) Zenbatekoa da hurrengo lau egunetan zehar lehenengo bi egunetan jaitsi eta besteetan igotzeko probabilitatea, atzo igo bazen?

   (b) Eta hurrengo bi egunetan egun batean jaitsi eta bestean igotzeko probabilitatea?

6. Enpresa batek 4 piezako lote bat dauka, baina printzipioz ez daki zenbat diren akastunak eta zenbat akasgabeak. Lotearen kalitatea hobetu nahian, piezak banan-banan erauzten ditu, eta pieza akastuna bada, pieza hori erretiratu eta bi pieza akasgabe gaineratzen ditu lotera; pieza akasgabea bada, pieza lotera itzultzen du besterik gabe.

   (a) Hiru pieza aterata, kalkulatu hirukote posible guztien probabilitateak, ontzian bina akasgabe eta akastun badaude hasieran.

   (b) Hirukotean *oxo* konbinazioa suertatu bada, hasierako ontzian zenbat pieza akastun zeudela esango zenuke?

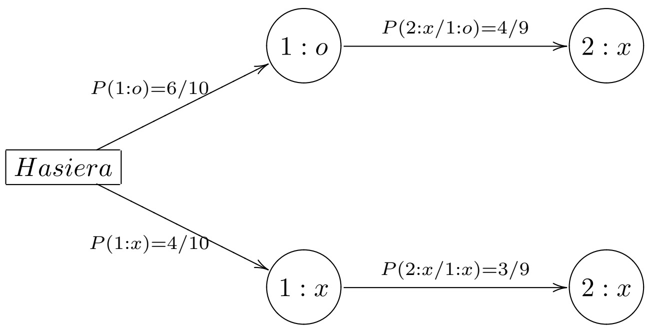
1.8 Probabilitate osoaren teorema: zuhaitz-diagramak

Adibidea: Ontzi batean 4 pieza akastun eta 6 pieza akasgabe daude. Itzulerarik gabeko zorizko laginketaz, zenbat da bigarren pieza akastuna izateko probabilitatea?

Erantzuna lehen pieza nolakoa izan den araberakoa da: lehen pieza akastuna izan bada, erantzuna 3/9, eta lehena akasgabea izan bada, 4/9. Erantzun zehatza bi balio horien artean dago, lehen pieza akastuna edo akasgabea izateko probabilitateen arabera haztatuz:

$$\begin{aligned} P(2x) &= P[(1o \cap 2x) \cup (1x \cap 2x)] = P(1o) \times P(2x/1o) + P(1x) \times P(2x/1x) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \end{aligned}$$

Problema eta horren parekoak, non kalkulatuko behar den probabilitatea beste gertakizun baten araberakoa den, aiseago ebazten dira probabilitate-zuhaitza eratuz, non besterik gabe $2:x$ egoerara heltzeko bide ezberdinak zehazten diren:



Eskatutako probabilitatea bilatzeko, helmugara iristeko adar barruko probabilitateak bidertu eta emaitza horiek helmugarako adar guztietarako batu behar dira:

$$P(2x) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$$

1.9 Zuhaitz-diagramak: ariketak

1. Hiri batean, gizonezkoak eta emakumezkoak 600 eta 400 dira, hurrenez hurren. Iaz, 200 auto-istripu izan ziren: horietatik 150etan gizonezkoak izan zuen ardura nagusia eta beste guztietan emakumeak. Zenbat da, gidari bat zoriz aukeraturik, istripua izateko probabilitatea? Kalkulua zuzenean nahiz probabilitate osotuaren teoremaz (sexuaren arabera bereizita) egin ezazu.
2. Eguneko auto-salmentak enpresa batean 1, 2, 3 edo 4 izan daitezke, 0.1, 0.2, 0.3 eta 0.4 probabilitateaz hurrenik hurren, independentziaz egun batetik bestera. Zenbatekoa da 2 egunetan 6 auto edo gehiago saltzeko probabilitatea?
3. Irakasle batek bi kontrol egiten ditu ikasturtean zehar, 0.5 eta 0.6ko probabilitateaz gainditzen direnak, hurrenik hurren. Kontrolen nota gorde

egiten da azken azterketarako, non aurrez suspenditutako zatiak soilik egin behar diren. Azken azterketan gainditzeko probabilitateak 0.7 eta 0.8 dira. Zenbatekoa da hurrengo azterketa baterako ezer (zatiren bat edo dena) geratzeko probabilitatea?

4. Makinak saltzen dituen enpresa batek bi ferietara joateko aurrekontua du soilik: A eta B ferietara edo C eta D ferietara joan daiteke. Feria bakoitzean salduko duen makina kopuruaren probabilitateak taula honetan azaltzen dira:

Kopuruak	0	1	2	3
A	0.10	0.20	0.30	0.40
B	0.35	0.30	0.20	0.15
C	0.20	0.20	0.30	0.30
D	0.30	0.30	0.20	0.20

4 makina edo gehiago saltzeko probabilitatea maximotu nahi bada, zein ferietara joan behar da?

5. Lanpostu baterako hiru hautagaiei azken bi proba egin behar zaizkie. Azken aurreko proba hautagai bakoitzak gainditzeko probabilitatea 0.6 da. Azken proba gainditzeko probabilitatea, berriz, 0.3 da. Zenbatekoa bi probak burutu ondoren hautagai bakarra geratzeko probabilitatea?

6. Akzio baten kotizazioa 0.4ko probabilitateaz igotzen da, bezperan igo bada eta 0.7 probabilitateaz, bezperan jaitsi bada. Zenbatekoa da hurrengo 4 egunetan zehar bi egunetan jaitsi eta besteetan igotzeko probabilitatea, atzo igo bazen?

1.10 Bayes-en teorema

Bayesen teoremak jasotzen den informazio gehigarrian oinarrituta gertakizun bati buruzko hasierako probabilitatea (a priori probabilitatea) zehazteko erabiltzen da. Emaitza a posteriori probabilitatea da.

Adibidea: Ontzi batean 8 pieza akasgabe eta 3 pieza akastun daude. Lehenengo pieza bat bidali zitzaion zoriz bezero bati. Ondoren, pieza bat aztertu eta akastuna dela ikusi da. Zenbatekoa da bidalitakoa akastuna izateko probabilitatea?

A_i	$P(A_i)$	$P(B/A_i)$	$P(A_i) \times P(B/A_i)$	$P(A_i/B)$
lehen pieza akastun	3/11=0.27	2/10=0.2	0.054	0.199
lehen pieza akasgabe	8/11=0.73	3/10=0.3	0.219	0.801
	1		0.273	1

Bayesen teoremari esker, jasotzen den B informazio gehigarri bati esker A gertakizun bati buruzko probabilitateak zehaztu egiten dira. A gertakizunari buruzko hasierako P(A) probabilitateak, a priori probabilitateak alegia, ez du barnehartzen B informazioa. Bukaeran, berriz, Ari buruzko P(A/B) probabilitate berria izango dugu, a posteriori probabilitatea alegia, B gertatu dela kontuan harturik.

Prozesua garatzeko, P(B/Ai) probabilitateak behar dira, egiantzak izenekoak.

Adibidean, B informazioa hau da: bigarren pieza akastuna da. Lehen pieza (bidalitakoa) akastuna izateko probabilitateari buruz galdetzen digute. A priori bidalitakoa akastuna eta akasgabe izateko probabilitateak 3/11 eta 8/11 dira, hurrenik hurren. Lehen zutabean jartzen dira eta gerta daitekeen guztia estali behar dute (akastun eta akasgabe).

P(B/lehena akastun) eta P(B/ lehena akasgabe) egiantzak eman ditzagun. Lehenengo pieza akastuna izan bada, Bren probabilitatea (bigarrena akastuna izateko probabilitatea) 2/10 da; lehenengoa akasgabea bada, 3 akastunak daude bigarren pieza ateratzerako eta orduan akastuna izateko probabilitatea 3/10 da.

A priori probabilitateak eta egiantzak finkaturik, kalkuluak bakarrik egin behar dira a posteriori probabilitateak eskuratzeko. A priori probabilitateak dagokien egiantzarekin bidertzen dira, batura kalkulatu (laugarren zutabean) eta batugai horietako bakoitza zati batura kalkulatu behar da (bostgarren zutabean).

Horrela, Bayesen teorema aplikatu ondoren, lehenengo pieza akastuna izateko probabilitatea txikiagoa da: bigarren akastuna bada, lasaiago egon gaitezke nolabait esateko, lehenengoan akastuna atera ez izatearen aukerak txikiagoak baitira, 0.27tik 0.199ra aldatu direlako.

1.11 Ariketak: Bayes-en teorema

1. Gaixotasun batek jota daudenen proportzioa %15 da populazio batean. Gaixotasunaren diagnostikoa egiteko test bat garatu da. Testa ez da perfektoa, ordea: gaixorik dauden pertsonetatik %80etan eman du diagnostiko zuzena; pertsona gaixorik ez badago, berriz, testak gaixorik dagoela dio kasuen %10etan. Pertsona bati egindako testak baiezkoa eman du. Nola aldatu behar dira aldez aurretiko probabilitateak? Eta testak ezezkoa ematen badu?
2. Lantegi batean A, B eta C makinek 2000, 5000 eta 3000 pieza ekoiztu zituzten hurrenik hurren azken urtebetean. A makinako pieza bat akastuna izateko probabilitatea %5 da. B eta C makinen kasuan, berriz, pieza akastuna suertatzeko probabilitateak %10 eta %2 dira, hurrenik hurren. Bezero batek pieza akastun batengatik erreklamazioa egin dio lantegiari. Zein makinari egotzi behar zaio akatsa?
3. Enpresa batek hiru motako txokolatezko bonboi-kaxak saltzen dizkie kafetegiei:
    - kaxa gorriak A motako 4 bonboi biltzen ditu, B motako 6 eta C motako 10;
    - kaxa urdinak A motako 10 bonboi biltzen ditu, B motako 4 eta C motako 6;
    - kaxa horiak A motako 8 bonboi biltzen ditu, B motako 8 eta C motako 4.

    Banatzaile bati 200 kaxa gorri, 100 kaxa urdin eta 300 kaxa hori banatzeko enkargua eman zitzaion. Kaxak jasotzean, banatzaileak kaxen artean A motako bi bonboien paperak ikusi ditu eta beraz, baten batek kaxa bat ireki eta A motako bi bonboi jan dituela ondorioztatu du. Kaxa irekia zein kolorekoa dela esango zenuke?
4. Test motako azterketa batean galdera bakoitzak lau aukera ditu. Galdera baten erantzuna jakin eta, beraz, ongi erantzuteko probabilitatea 0.7 dela uste da. Ikasleen %10ek erantzun gabe uzten du eta besteek zoriz erantzuten dutela zenbatetsi da. Ikasle batek ongi erantzun badu, zenbatekoa da erantzuna benetan jakiteko probabilitatea? Zenbat aukera jarri behar dira galdera bakoitzean, ongi erantzunda erantzuna benetan jakiteko probabilitatea 0.96 izan dadin? Eta 0.99 izan dadin?
5. Enpresa berri batek merkaturatu behar duen produktu baten kontsumitzaileak %10, %20, %30 edo %40 izango direla uste du, baino portzentaje horiei buruz erabateko ziurgabetasuna du. 10 laguni inkesta bat egin eta horietatik seik produktua kontsumituko dutela adierazi zuten. Inkesta horren ondoren, nola moldatu behar dira merkatu-kuoten hasierako probabilitateak?
6. Aseguru-enpresa batek azken urtean istripu bat izan duten 100 aseguratu, azken urtebetean istripurik izan ez duten 200 aseguratu, azken bi urteotan

istripurik izan ez duten 400 aseguratu eta azken hiru urteotan istripurik izan ez duten 500 aseguratu zituen bere bezero-karteran urte hasieran. Egindako zenbatespenen arabera, azken urtean istripua izan duen batek hurrengo urtean ere istripua izateko probabilitatea 0.22 da eta probabilitate hori 0.04 jaisten da istripurik gabeko urte bakoitzeko. Pertsona bat bulegora sartu eta istripu bat izan berri duela adierazi du. Berari buruzko dokumentazioa galdu dugu, baina daukagun informazioarekin, urte hasieran zein bezero multzotan zegoela esango zenuke?

1.12 Froga estatistikoak

1.12.1 Adibide bat

2016an Mike Brown and Konstantin Batygin astronomoek Neptunoz haraindiko planeta handi baten existentzia ondorioztatu zuten, planeta horren argazki edo bestelako ebidentzia argirik ez dagoen arren. Planeta horri Bederatzi Planeta deitzen zaio.

Nola egin zuten?

Printzipioz sinestsi edo hipotesitzat hartu behar dena hau da: ezer hauteman ez denez, ez dago planetarik Neptunoz haraindi.

Baina badago zeharkako ebidentzia bat: TNO, Trans-Neptunian Object edo Neptunoz haratagoko Objektu zenbaiten orbitak toki beretsuan daude.

Froga estatistikoa: hasierako hipotesia (ez dago horrelako planetarik) egia izanda, oso probabilitate txikia dago objektu horiek elkarrekin izatekoa. Gertatu dena oso arraroa da hipotesi horren pean, eta harritu egiten gara ondorioz. Harritu egiten naizenez, hasierako hipotesi hori baztertu egiten dut. Aitzitik, probabilitate hori handia da, Bederatzi Planeta existitzen bada.

Konklusioa: Bederatzi Planeta existitzen dela onartzen da, baina hipotesi moduan betiere.

1.12.2 Metodo orokorra

Froga estatistiko baten helburua aurrez finkatzen den baieztapen bat, *hipotesi nulu* (H_0) deitu eta printzipioz besterik gabe onartu edo sinetsi egiten dena, egiazkotzat ala faltsutzat hartzeko erabakitzea da, horretarako gertatutakoa, ebidentzia alegia, ikusita.

Funtsean, hipotesi nulupean, hots, hipotesi nulua harturik edo sinetsirik, ebidentziaren probabilitatea kalkulatzen da. Probabilitatea aski txikia bada, aurrez finkatutako α adierazgarritasun-maila bat baino txikiagoa zehazkiago, gertatutakoa hipotesi nulupean harrigaria dela pentsatzen da, eta hortik hipotesi nulua baztertuko da. Aitzitik, ebidentziaren probabilitatea, hipotesi nulupean betiere, aski handia bada (α baino handiagoa), gertatutakoa hipotesi nulupean normaltzat hartzen da, eta hala hipotesi nulua onartu egiten da.

Hipotesi nulua aukeratzeko irizpide bat izaten da hipotesi sinple, zehatz eta egonkor bat (maiz, erreferentziazko balio zehatz eta sinple bat) hartzea.

Laburbilduz, honako hauek dira froga estatistiko bat garatzeko pausoak:

1. α zehaztu
2. H_0 finkatu
3. E ebidentzia zehaztu
4. $P[E/H_0]$ kalkulatu, p balioa detiuko duguna.
5. $p \leq \alpha \rightarrow H_0$ baztertu; bestela H_0 onartu.

1.12.3 Ariketak: froga estatistikoak

1. Saltzaile batek bigarren eskuko lote batetik pieza batzuk saldu nahi dizkigu. Lotean 20 pieza daude eta 4 akastun gehienez, berak dioenez. 2 pieza erosiko dizkiogu, piezak zoriz aukeratuko dituelako baldintzarekin. 2ak akastun suertatu dira. Saltzaileak ziria sartu digula erabaki behar da al da? $\alpha = \%5$.
2. Enpresa batek 4 produktu merkaturatu behar ditu eta printzipioz laurek harrera berdina izango dutela pentsatzen du. 3 laguni produktuak frogatzeko aukera eman eta guztiek A produktua onena dela aipatu dute. Ebidentzia aski al dago A produktua benetan hobea dela esateko? Zenbat pertsonak adierazi beharko lukete batera A produktua hobea dela, benetan hobea dela erabakitzeko? $\alpha = \%1$.
3. 20 piezako lote batean gehienez 3 akastun daudela baieztatu digu hornitzaileak. Horri buruz erabakitzeko, 5 pieza zoriz erauzi eta 2 akastun hauteman da. Adierazgarritasun maila %2 izanik, hornitzailearen baieztapena egiazkoa dela erabaki al daiteke?

1.12.4 Zenbait iruzkin froga estatistikoei buruz

1. Frogaren norabidea zehaztea ez da beharrezkoa gertatua muturreko kasu bat denean.
2. Hipotesi nulupean, hots, hipotesi nulua egia izanda, ebidentziaren probabilitatea α baino txikiagoa hipotesi nulua baztertu egiten denez, α hipotesi nulua egia izanda, bera baztertzeko probabilitatea da, I motako errorea deitzen dena.
3. α aurretik finkatzen du ikerlariak, hipotesi nuluarekin neutraltasunez jokatzeko (aurrez ezin dugu jakin hipotesi nulua onartu edo baztertuko dugun). Ohiko adierazgarritasun-mailak 0.01, 0.05 eta 0.10 dira.
4. α zenbat eta handiagoa den, orduan eta errazagoa da hipotesi nulua baztertzea; beraz, hipotesi nuluarekin aurrez konbentzimendu edo konfiantza handia badago, α txikia jarri beharko da aurretik.

5. Erabakia ez da inoiz zerbait egia ala faltsua den, baizik eta zerbait egia den onartu edo baztertzea.

$$P\left[\begin{array}{c}\text{gertatu dena}\\ \underline{\text{edo zerbait arraroagoa}}\end{array} \Big/ H_0\right] = P\left[\begin{array}{c}\text{ateratako 5 piezatik}\\ \underline{\text{2 akastun edo gehiago}}\end{array} \Bigg/ \begin{array}{c}\text{20ko lotea:}\\ \text{17 '0' eta 3 'X'}\end{array}\right]$$

frogaren norabidea

lotea:	20tik 3 'x':	%15
gertatua:	5etik 2 'x':	%40

gertatua 'asko' da;
beraz, arraroa 'goitik'

$$= P\left[\begin{array}{c}\text{ateratako 5 piezatik}\\ \text{2 akastun edo 3 akastun}\end{array} \Bigg/ \begin{array}{c}\text{20ko lotea:}\\ \text{17 '0' eta 3 'X'}\end{array}\right]$$

$$= \frac{\binom{17}{3}\binom{3}{2}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{17}{2}\binom{3}{3}}{\binom{20}{5}} = 0.1403509 > \alpha \rightarrow H_0 \ onartu$$

Irudia 1.9: **3. ariketa**. Frogaren norabidearen azalpena eta frogaren ebazpena.