

# Zorizko aldagaiak

Josemari Sarasola

Estatistika enpresara aplikatua

Gizapedia



*Zorizko aldagaia* zoriz zenbakizko balioak hartzen dituen aldagai bat da (ing. *random variable*, gazt., *variable aleatoria*). Adibidez, dado batean izandako puntuak, bikote batek izango duen haur kopurua eta ikasle batek azterketa batean lortuko duen nota.

Zorizko aldagai batek har ditzakeen balio guztiak horien probabilitateekin batera ematen direnean, zorizko aldagaiaren *probabilitate-banaketa* definitu dela esaten da (ing., *probability distribution*, gazt., *distribucion de probabilidad*).

Zorizko aldagaiak, eta beraz horien probabilitate banaketak, *diskretuak* nahiz *jarraituak* izan daitezke.

# Zorizko aldagaia eta probabilitate banaketa

Adibidea: dadoa jaurtitzen denean, lortutako puntu kopuruari buruz,

$x$	$p(x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
	1

*Zorizko aldagai diskretuak* balio bakanak edo isolatuak hartzen dituztenak dira (dado bateko puntu kopurua, bikote baten haur kopurua, adibidez). Bi eratara zehaz daiteke horren banaketa:

*probabilitate-funtzioaren bitartez* nahiz *banaketa-funtzioaren bitartez*.

*Probabilitate-funtzioak* balio baten probabilitatea ematen du *zuzenean*. Taula batez zein funtzio matematiko batez definitua izan daiteke.

Adibidez,  $P[X = x] = \frac{x + 1}{10}$ ;  $x = 0, 1, 2, 3$  probabilitate funtzioa da ( $X$ : aldagaia,  $x$ : balio konkretua). Taula moduan:

x	0	1	2	3
p(x)	$\frac{0 + 1}{10} = 0.1$	$\frac{1 + 1}{10} = 0.2$	$\frac{2 + 1}{10} = 0.3$	$\frac{3 + 1}{10} = 0.4$

Probabilitate funtzio batean, probabilitate guztien batura 1 izan behar da, noski.

# Zorizko aldagai diskretuak

*Banaketa-funtzioak*  $x$  balio batetik beherako probabilitatea, balio hori barne, ematen du:

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Taulaz zein funtzionalki adierazia izan daiteke. Adibidez:

$$F(x) = 1 - (1/2)^x; x = 1, 2, 3, \dots$$

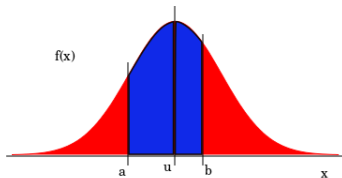
$x$	1	2	3	...
$p(x)$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.5$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.75$	$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.875$	...

Propietate hauek ditu:

- probabilitateak goraka doaz,  $x$ -rekin batera, probabilitateak metatzen direnez;
- 0tik abiatu, eta 1 balioan bukatzen da.

*Zorizko aldagai jarraituak* tarte batean edozein balio har dezaketenak dira (adib., pertsona baten altuera).

*Dentsitate-funtzioaren bitartez* zein *banaketa-funtzioaren bitartez* zehaztu daiteke dagokion banaketa:



Goiko irudia *dentsitate-funtzioa* da, eta  $f(x)$  adierazten da. Hartan honela kalkulatzen da probabilitatea:

$$P[a < X < b] = \int_a^b f(x)dx$$

Intuitiboki oso esanahi garbia du: probabilitateak azpiko azalerak direnez, probabilitate handieneko tarteetan,  $u$  inguruan irudian,

Puntu bateko probabilitatea beti da 0, tarte bateko infinitu punturen artean puntu bat ez baita ezer ere, eta haren azpian ez dago azalerarik:

$$P[X = x] = 0$$

Beste alde batetik, dentsitate-funtzioek baldintza hauek bete behar dituzte:

- (1) Azpiko azalera osoa, zorizko aldagaia definitua dagoen balioetarako, balio posibleetarako alegia, 1 izan behar da:

$$\int_{\Omega} f(x)dx = 1$$

- (2) Balio posibleen tarte osoan zehar  $x$  ardatzaren gainetik dago:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$$

*Banaketa-funtzioak* balio batetik beherako probabilitatea ematen du (puntu hori bera sartzen den ala ez hutsala da, puntu bateko probabilitatea 0 denez):

$$F(x) = P[X < x] = \int_{inf}^x f(x)dx$$

Hala,  $x$  baliorainoko probabilitate metatua ematen duen funtzioa dela esan daiteke:  $x$  gehituz, dentsitate-funtzioko azpiko azalera metatzen doa.

\*inf: gerta daitekeen balio txikiena, sup: gerta daitekeen balio handiena



Beraz, banaketa-funtzioak *zuzenean* ematen du  $x$  azpiko probabilitatea, bertan dentsitate-funtzioan egin behar dugun integrala ja egina dagoelako.

Baina banaketa funtzioarekin beste edozein tarteko probabilitatea ere kalkula daiteke, balioak banaketa-funtzioan behar bezala ordeztuz:

- $P[X < a] = F(x=a)$
- $P[X > b] = 1 - P[X < b] = 1 - F(x=b)$
- $P[a < X < b] = P[X < b] - P[X < a] = F(x=b) - F(x=a)$

Banaketa-funtzioak propietate hauek betetzen ditu, beraz:

- (1)  $F(x = inf) = 0$ , balio posible txikienaren azpitik probabilitatea 0 delako.
- (2)  $F(x = sup) = 1$ , balio posible txikienaren gainetik probabilitatea 0 delako.
- (3) Gorakorra da, probabilitatea metatzen doalako,  $x$ -k aurrera egin ahala.
- (4) Eta beraz, aurrekoetatik,  $0 \leq F(x) \leq 1$  betetzen duela esan daiteke, hau da, 0 eta 1 bitarteko balioak hartzen ditu beti.

Banaketa-funtzioak eta dentsitate-funtzioak elkarrekin duten erlazioa honelakoa da:

- dentsitate-funtziotik banaketa-funtzioa eskuratzeko, integratu behar da, dakigunez:

$$F(x) = \int_{inf}^x f(x)dx$$

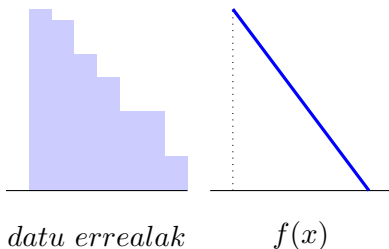
- eta beraz, banaketa-funtziotik dentsitate-funtzioa eskuratzeko, deribatu behar da:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- Probabilitate-banaketa batean hainbat balio ezberdin har ditzakeen konstante bat da, **konstante zehazgabea** alegia, letra batez adierazi ohi dena (ez  $x$ , hori zorizko aldagaia baita) eta balio horietako bakoitzeko banakuntza guztiz zehazten duena.
- Parametroa zehazten ez bada, probabilitate-banakuntza **era generikoan** definiturik geratzen da, zehaztu gabe, eta beraz probabilitateak ezin dira kalkulatu.
- Printzipioz, parametroak **ezezagunak** izaten dira probabilitate-banaketa batean.
- Garrantzitsuak dira estatistikan, **helburua** parametro ezezagun hori zenbatetsi edo **estimatzea** baita, lagin bateko datuetan oinarrituz, banakuntza guztiz zehazte aldera.

# Banaketak eredu moduan

Har ditzagun zorizko aldagai bati esleitu diogun probabilitate-banaketa eta zorizko aldagai horri buruzko datu errealak:



Probabilitate-banaketak horrelakoak izaten dira: matematikoak, eta beraz, oso perfektuak edo.

Errealitatea gorabeheratsuagoa da, datuetan ikusten dugunez.

**Errealak al dira, beraz, probabilitate-banaketak?**

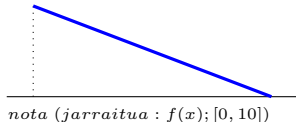
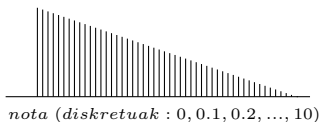
Erantzuna:

Ez dira guztiz errealak, baina zientzian ez dira bilatzen erabateko zehaztasuna eta xehetasun guztietara heltzea, errealitatearen hurbilketak edo sinplifikazioak baizik, *eredu edo modelook* alegia, problemak era sinplean ebazteko planteatzen direnak. Izan ere, problemak errealitateko datu gordinekin lan egitea oso konplexua litzateke.

Horrexegatik idazten dugu problemetan [...] *banatzen dela uste da*, probabilitate-banaketak ereduak baitira, *usteak edo hipotesiak* finean, gero errealitateko datuekin kontrastatu behar direnak.

# Jarraituzko hurbilketak

Zorizko aldagai diskretu batek balio asko hartzen dituenean, probabilitate-banaketa jarraitu baten bitartez hurbildu ohi da, laburtzeagatik (erosoagoa da kalkuluak egiteko):



Nola kalkulatu  $P[\text{nota} = 5]$ ?

- Diskretuan, besterik gabe taulako probabilitateari (zutabearen altuerari) erreparatu. Adibidez:  $P[\text{nota} = 5] = 0.04$
- Jarraituan, puntu bat denez  $P[\text{nota} = 5] = 0$
- **KONTRAESANA SORTZEN DA!**
- Nola ebatzi kontraesana?

Zuzena eremu diskretukoa da, noski. Izan ere, egon badaude ikasleak 5eko notarekin.

Nola lortu eremu jarraituan eremu diskretuko emaitza (gutxi gorabehera) eskuratzea?

$$P[X = 5] = P[4.95 < X < 5.05] = \int_{4.95}^{5.05} f(x)dx$$

Izan ere, eremu jarraituko notak nota diskretu gertuenera borobiltzen dira:

- 4.9765  $\rightarrow$  5
- 5.0398  $\rightarrow$  5
- baina, 4.9327  $\rightarrow$  4.9
- baina, 5.0649  $\rightarrow$  5.1



## Beste adibide batzuk

- unibertsitate batean matrikulatutako ikasle kopuruari buruz:

$$P[X = 1200] = P[1199.5 < X < 1200.5]$$

- 10 gramuko zehaztasuna duen balantza batean pisatzen den fruitu bati buruz:

$$P[X = 100] = P[95 < X < 105]$$

# Arrisku-balioa (Value at Risk, VaR)

- Arrisku-balioa (nazioartean ezagunagoa *Value at Risk*, *VaR* izenekin) inbertsioen arriskua neurtzeko adierazle bat da.
- Inbertsio baten errendimenduaren banaketa  $F(x)$  bada, honela definitzen da, aurrez ezarritako  $p$  probabilitate baterako:

$$VaR(p) = F^{-1}(p)$$

- Beraz, VaR  $p$  probabilitateari dagokion pertzentila da finean. Adibidez,  $VaR(0.05) = 2$  izanik, inbertsioan %0.05eko probabilitatea dago mozkinak 2 edo txikiagoak izateko. Hau da, 20 egunetatik batean espero da batean irabaziak 2 baino txikiagoak izatea.
- Baliatzen diren probabilitate ohikoenak 0.01 eta 0.05 dira.
- Probabilitate txiki horiekin inbertsioaren alde txarrari, arriskuari alegia, begiratzen zaio.
- Hala, VaR zenbat eta handiagoa, inbertsioa orduan eta hobea dela irizten da.