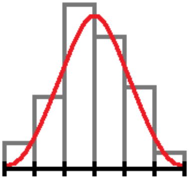
Banaketa normala eta limitearen teorema zentrala

Josemari Sarasola

Estatistika enpresara aplikatua

Estatistikan gehien erabiltzen den banakuntza da arrazoi hauengatik:

- kanpai itxurakoa eta simetrikoa da, eta horrela errealitatean maiz agertzen diren fenomeno askotara aplika daiteke (hortik datorkio *normal* izena);



- beste hainbat probabilitate-banakuntzen limitea da;
- eta propietate matematiko interesgarriak ditu.

Banaketa normala

XVIII. mendetik ezagutzen da, Abraham de Moivre eta Pierre-Simon de Laplace matematikariei esker. Carl Friedrich Gauss matematikariak aplikatu zuen lehen aldiz, errore astronomikoen arloan. Horregatik, Gauss-en ezkila ere deitzen zaio.

Irudia: Alemaniako markoaren billete bat, non Gauss eta banaketa normala agertzen diren.

Definizioa, notazioa, parametroak, simetria

- Dentsitate-funtzioa (ez ikasi, praktikan ez baita erabiltzen):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \ -\infty < x < \infty$$

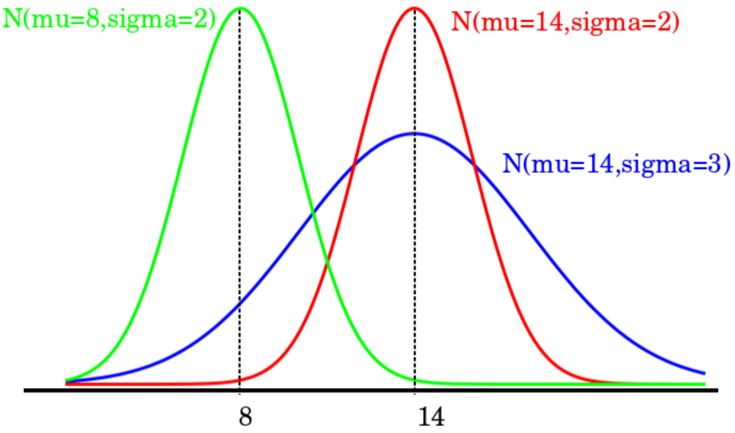
- Parametroak:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

μ : itxaropena σ : desbideratze estandarra

- μ itxaropenaren inguruan simetrikoa da (erabilgarria probabilitateak kalkulatzeko)

Banaketa normala



Propietatea: aldakuntza lineala

$X \sim N(\mu, \sigma)$ banaketa izanik, $Y = a + bX$ zorizko aldagaia ere banaketa normalaren araberakoa izango da, parametro hauekin:

$$Y \sim N(a + b\mu, |b|\sigma)$$

Banaketa normala

Propietatea: ugalkortasuna

- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$
- $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$
- ...
- $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$ banaketak izanik, elkarrekiko independenteak, honako hau betetzen da;

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim N\left(\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n, \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}\right)$$

Hau da, banakuntza normalen batura banakuntza normalaren araberakoa da, batezbestekoa batezbestekoen batura eta desbideratzea *bariantzen baturaren erroa* izanik.

Ohartu: $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2} \neq \sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_n$ (bariantzak gehitzen dira beti!)

Banaketa normala

Banaketa normal estandarra

$Z \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$ banaketa normal *estandarra* da. Beti Z deitzen zaio. Oso garrantzitsua da, beste banaketa normalei buruzko probabilitateak kalkulatzeko patroi edo estandar gisa erabiltzen delako, estandarketa izeneko eragiketaz.

Banaketa normala

Estandarketa

Probabilitateak kalkulatzeko, banaketa normal guztiak *estandar* bilakatu behar dira, *estandarketa* izeneko prozesuaz:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Hots, banaketa normal bati batezbestekoa kendu eta zati desbideratzea egiten bazaio, banaketa normal estandar bilakatzen da.

Banaketa normala

R softwareaz

- `pnorm(1.45) #P[Z<1.45]`
- `1-pnorm(1.45) #P[X>1.45]`
- `pnorm(1.45,lower.tail=FALSE] #P[X>1.45]`
- `pnorm(4,mean=3,sd=1.5) #P[X>4], X:N(3,1.5)`
- `qnorm(0.90) #P[Z<z]=0.9,z?`
- `qnorm(0.90,,mean=3,sd=1.5) #P[X<x]=0.9, x?,X: N(3,1.5)`

Binomialaren hurbilketa

Banaketa binomial batean, n handia bada ($n \geq 30$) p txikia izan gabe (orduan Poisson baliatzen baita), hurbilketa gisa banaketa normala erabil daiteke:

$$B(n,p) \xrightarrow[n \geq 30]{} N(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq})$$

Hurbilketa honi De Moivre-Laplace teorema deitzen zaio.

Poisson banaketaren hurbilketa

Poisson banaketa batean, λ handia bada $(\lambda \geq 30)$, hurbilketa gisa banaketa normala erabil daiteke:

$$P(\lambda) \xrightarrow[\lambda \geq 30]{} N(\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda})$$

Limitearen teorema zentrala (LTZ)

Badakigu banaketa normalen batura banaketa normalari jarraiki banatzen dela, batzen diren banaketak elkarrekiko independenteak badira (ugalkortasunaren propietatearengatik). Eta zer batzen diren banaketak normalak ez badira (uniformeak, esponentzialak, bestelakoak badira)?
Normalak ez diren banaketen batura normal banatzen baita ere, baina bi baldintzekin: independenteak badira, eta (hau berria da) horien kopurua aski handia bada, 30 baino handiagoa orokorrean.
Aurrekoa ezartzen duen teoremari Limitearen Teorema Zentrala deitzen zaio.

Banaketa normala

Limitearen teorema zentrala (LTZ)

- $X_1 \sim ?(\mu_1, \sigma_1)$
- $X_2 \sim ?(\mu_2, \sigma_2)$
- ...
- $X_n \sim ?(\mu_n, \sigma_n)$ harturik, edonolakoak baina batezbesteko eta bariantza jakinekin, elkarrekiko independenteak, honako hau betetzen da, n kopurua aski handia bada $(n \geq 30)$;

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N\left(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}\right)$$

Hau da, banaketa askoren batura, batezbesteko eta bariantza jakinekin, eta elkarrekiko independenteak izanik, normal banatzen da.