Inferentziarako sarrera

Josemari Sarasola

Estatistika enpresara aplikatua

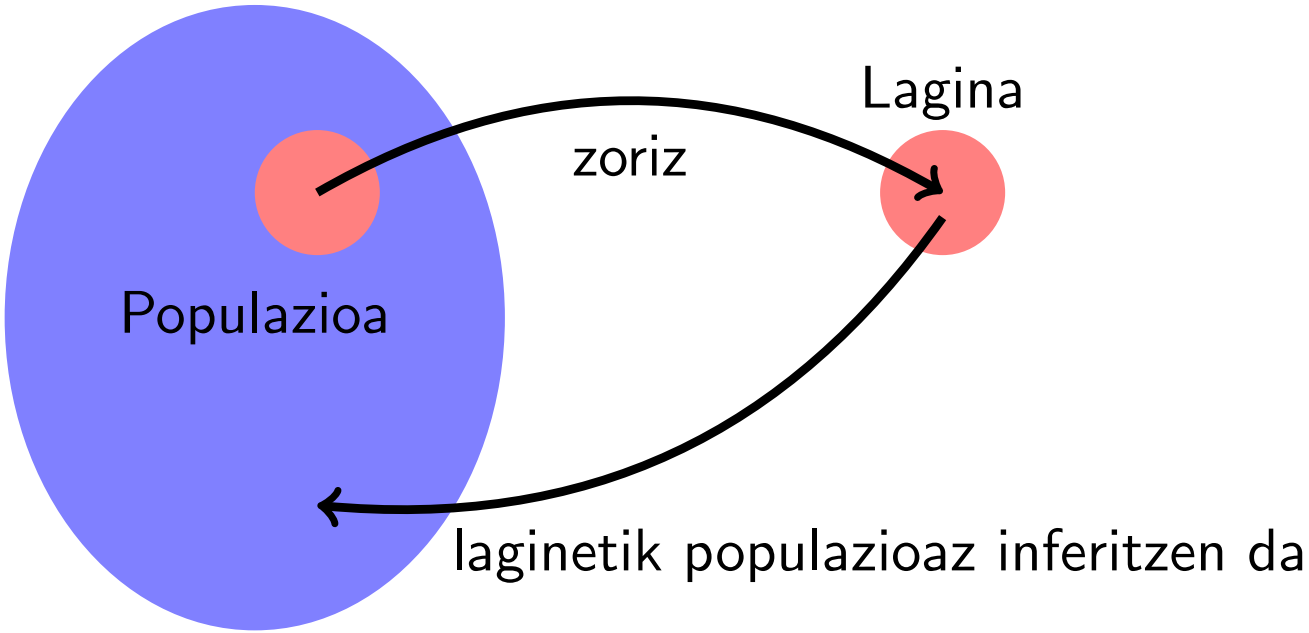
Gizapedia

Inferentzia estatistikoa

Estatistikan, populazioak (adibidez, 18 urteko gazteak herrialde batean) ikertu nahi ditugu, zehatzago populazioari buruzko ezaugarri bat (altuera, adibidez). Ezaugarri hori aldakorra izaten da, zorizkotzat har dezakegu, eta beraz probabilitate banaketa bat dagokio, parametro zenbaitekin. Probabilitate banaketa hori populazioaren adierazpen sinplea da, eta beraz populazioaren eredua dela esan dezakegu. Hurrengo azalpenetan, *populazioa, probabilitate banaketa eta eredua* (ia) sinonimotzat har ditzakegu.

Inferentzia estatistikoa

Gehienetan, ezin ditugu aztertu populazio osoko elementuak (garestiegia delako edo populazioko elementu guztiak zerrendatu ezin direlako), eta orduan lagin bat hartzen da populazioari buruzko informazioa izateko (populazioari buruz inferitu ahal izateko). Laginak *zoriz hartutakoak* izan behar dira, populazioaren adierazgarri izango badira.



Inferentzia estatistikoa

Aurreko ikasgaietan, eredu estatistikoek (binomial, Poisson, esponentziala normala) aplikazio interesgarriak modu sinplean ebazteko balio dutela ikasi dugu. Horretarako, eredu horietako parametroak kuantifikatuta izatea ezinbestekoa da.
Baino bi galdera hauek planteatzen dira orduan: nola zehazten dugu probabilitate banaketa bat populazio baterako? Eta nola zehazten ditugu bere parametroak?

- 1. galderaren erantzuna: hasiera batean eredua edo probabilitate banaketa (parametroak kuantifikatu gabe) suposatu egiten da (gutxi gorabehera, histogramari erreparatuz adibidez: kanpai itxurakoa bada, eredu normala esleitzen diogu populazioari).
- 2. galderaren erantzuna: Parametroak lagineko datuetatik kuantifikatu behar dira, estimatzaileak erabiliz, lagin datuetatik kalkulatzen diren formulak (adibidez, Poisson populazio baten lambda parametroa kuantifikatzeko, datuen batezbestekoa kalkulatu).

Problema nagusia

Problema nagusia **inferentzia estatistikoan** hau da: populazio bateko banaketa-parametroak inferitu populazio osotik jasotako laginak baliatuz.

Laginak populazio batetik erauzten diren datu-azpimultzoak dira. Ikergai den multzo osoa populazioa da, baina hura datuz datu osorik jasotzea ezinezkoa denez, hortik datu batzuk soilik jasotzen dira, lagina osatzen dutenak. Lagina populazioaren adierazgarria izateko, datuak zoriz jaso behar dira, zehatzago *zorizko laginketa sinpleaz*, non populazioko elementu guztiek aukeratuak izateko probabilitate berdina duten, eta beraz zoriz eta independentziaz aukeratzen diren.

Datuak bildurik, datuei dagokien eredua erabaki behar da. Bi eratara egin daiteke:

- datuen histograma edo beste grafiko bat eratuz, nolako itxura duen ikusita. Adibidez, aski da datuen histogramak kanpai itxurakoa izatea banakuntza normala onartzeko;
- datuen izaerari berari erreparatuz: datuak bai/ez motakoak badira, eredu binomiala da oinarrizkoena, independentzia suposatuz.

Lagineko datuekin, estimatzaileak (zenbatesleak edo estatistikoak ere deituak) kalkulatzen dira, populazioko ezaugarriak, ereduko parametroak alegia, kuantifikatzearren. Orohar, parametroari θ (theta) deitzen zaio, eta horren estimatzaile edo zenbatesle bati $\hat{\theta}$.
Ohartu behar da parametroak (txanorik gabe) orokorrean ezezagunak izango direla, baita estimatu ondoren ere; estimatzaileek horien zenbatespen edo estimazioak (txanoarekin) emango dituzte.
Adibidez, populazioko (ereduko) batezbestekoa (*population mean*) zenbatetsi edo estimatzeko, lagin batezbestekoa (*sample mean*) kalkulatu ohi da. Zenbatespen edo estimazio hori honela idazten da: $\hat{\mu} = \overline{x}$. Estimatzaile intuitibo horiei *estimatzaile natural* deitzen zaie.
Parametro baterako propietate *onak* dituzten estimatzailea aukeratu behar da, orohar haren balio ezezagunetik gertu ibiliko dena.

Parametro baterako estimatzaileak aukeratuta, bi modutara kuantifikatu daitezke parametroak:

- zuzeneko estimazioaz, hau da, parametroaren baliotzat estimatzaileak ematen duena hartuz; adibidez, $\hat{\mu} = \overline{x} = 4.5$.
- parametroaren balio zehatz bat hipotesi nulutzat hartuz eta estimatzailearen balioa ikusita erabakiz hipotesi hori bazter daitekeen ala ez; adibidez, $H_0 : \mu = 4$ onartu egiten dut $\overline{x}$ estimatzailearen emaitza ikusita.

Parametroak	Estimatzaileak
Notazioa: θ	Notazioa: $\hat{\theta}$ (θ-ren estimatzailea)
Populazioari edo ereduari dagozkio	Laginari dagozkio
Konstanteak dira	Aldakorrak dira
Ezezagunak izaten dira	Kalkulatu egiten dira datuetatik
θ bakarra da	$\hat{\theta}$ estimatzaile anitz daude eskura
Adibidea: μ (populazioko batezbestekoa)	Adibidea: $\hat{\mu}_1 = \overline{x}$, $\hat{\mu}_2 = Me$

Ohikoak dira *estimatzaile naturalak*, populazioko parametroak estimatzeko laginean oinarritutako formula baliokideak alegia. Adibidez, populazioaren μ estimatzaile naturala lagineko datuen $\hat{\mu} = \overline{x}$ da.

Parametroak kuantifikatuta, ordurarte egindako guztia zuzena den frogatu behar da, hau da, ereduaren balidazioa egin behar da. Zehatzago:

- datuak benetan zoriz jaso diren;
- aurrez suposatu dugun eredua edo banaketa benetan egokia den jasotako datuetarako (doikuntzaren egokitasuna, ingelesez *goodness of fit*)
- datuak homogeneoak diren, hots, populazio bakar bati buruzkoak diren (adibidez, emakume eta gizonen datuak batera jarririk, frogatu behar da bi sexuak benetan berdinak diren ala ez, datuak lagin berean bildu ahal izateko).

Jarraian, balidazioaren hiru alderdi hauek nola frogatu ikasi behar dugu.

Aldagai dikotomikoetarako eta kuantitatiboetarako (balio bakoitza medianatik gora edo behera dagoen jarrita) gara daiteke, datuak zoriz (eta beraz independentziaz) jaso diren erabakitzeko. Bolada bat balio edo zeinuko bereko datu segidetako bakoitza da. Datuak kuantitatiboak direnean, datu segidak medianatik gora eta behera dauden adierazten dute boladek. Froga datu-multzo osoan dagoen bolada-kopuruan oinarritzen da. Adibidez, XX0XX000XX akastun eta akasgabeen sekuentzian bolada kopurua 5 da.

Hiru egoera posible:

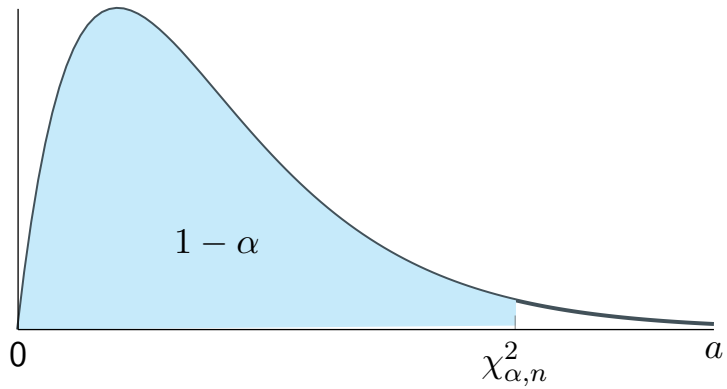
- XXXXXOOOOO: 2 bolada (hots, gutxi) $\rightarrow$ zorizkotasun-eza edo dependentzia
- XOXOXOXOXO: 10 bolada (hots, asko) $\rightarrow$ zorizkotasun-eza edo dependentzia
- XXOOOXOXXO: 6 bolada (hots, ez asko ez gutxi) $\rightarrow$ zorizkotasuna, eta beraz independentzia

Beraz, [H_0: independentzia] bolada kopurua oso handia edo oso txikia denean baztertzen da.

- Datuak jaso diren ordenan hartu behar dira beti.
- Froga alde bikoa da, H_0-pean arraroa goitik nahiz behetik dagoenez.
- Erabakia hartzeko taulak erabiltzen dira, *balio kritikoak* ematen dituena
- Datu kopurua handia denean, boladak honela banatzen dira H_0-pean:

$$R \sim N\left(\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1, \sigma = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}\right)$$

Froga honetan, probabilitate banakuntza berezi bat baliatu behar dugu: χ^2_n (khi-karratu) banakuntza, n parametro bakarra duena (*askatasun-mailak* izenekoa eta zenbaki naturala izan behar dena), eta balio positiboak soilik hartzen dituena. Honelakoa izaten da, eskubirantz alboratua:



Bere balioak taularatuta daude, $1-\alpha$ azpiko probabilitate zehatzetarako. Adibidez,

- $\chi^2_{0.01,4} = 13.3$
- $\chi^2_{0.25,2} = 2.77$

- H_0: eredua zuzena da, kuantifikatutako parametroekin.
- Aldagaiaren balio edo balio-tarte bakoitzeko maiztasun enpirikoak (O_i) eta teorikoak (E_i), azken horiek ereduko probabilitateetatik, kalkulatzen dira.
- $X^2 = \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ estatistikoa kalkulatu.
- X^2 *oso handia denean*, maiztasun teorikoen eta enpirikoen arteko aldea handia da, eta beraz eredua zuzena ez dela esateko joera beharko genuke izan. Froga alde bakarrekoa da eta *arraroa goitik dago*, hortaz.
- Froga burutzeko, X^2 estatistikoaren emaitza balio kritikoarekin alderatu behar da:
  - $\chi^2_{\alpha,k-1}$ balioarekin, k izanik balio edo tarte desberdinen kopurua; edota,
  - parametroak estimatu direnean, $\chi^2_{\alpha,k-z-1}$ balioarekin, z izanik datuetatik *estimatu* diren parametroen kopurua.

- Datu kuantitatiboetarako erabiltzen da, atributu dikotomiko baten arabera bereiz daitezkeenak.
- H_0: atributuak ez du alderik eragiten $\rightarrow$ homogeneotasuna
- Datu guztiak txikienetik handienera ordenatu.
- Heinak (mailak edo ordenak) jarri, atributuaren bi kategorien arabera bereizita.
- Atributuko kategoria bakoitzeko, W heinen batura kalkulatu. Bietatik txikiena hartu, W_{min} deituko duguna.

- W_{min} oso txikia denean, bi datu azpimultzoak oso desberdinak direla esan nahi du. Froga alde bikoa da, minimoa bi taldeetako edozeini egoki dakiokeelako, baina minimoa hartzen dugunez beti behetik begiratzen da.
- Balio kritikoak taulan bilatzen dira, kategoria bietako datu-kopuruaren arabera, lagin txikietarako ($n_1, n_2 \leq 20$).
- Lagin handietarako ($n_1, n_2 > 20$), honela banatzen da estatistikoa, n_1 1 kategoriako lagin-tamaina izanik:

$$W_1 \sim N\left(\mu = \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2},\ \sigma = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right)$$

AMAIERA