

Erregresio-analisia

Josemari Sarasola

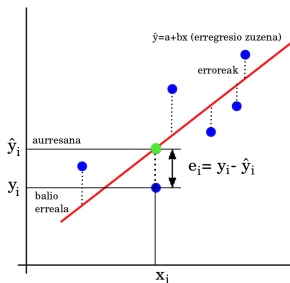
Estatistika eta datuen analisia

Gizapedia



Helburua

(x_i, y_i) datuei, bi aldagaiko puntu-hodei bati alegia, zuzen bat doitzea, puntuetara gehien hurbiltzen dena. y aldagaitzat aldagai dependentea hartzen da.



Nola eratu zuzena?

Errore karratu guztien batura txikien egiten duen zuzena eratuko da, karratu txikien zuzena deitzen dena. Beraz, zuzena $\hat{y} = a + bx$ izanik, problema hau da:

$$\min_{a,b} \sum_i e_i^2 = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_i (y_i - a - bx_i)^2$$

Nola eratu zuzena?

Horretarako, minimotu beharrekoa a eta b parametroei buruz deribatu eta 0-ra berdindu behar da. Horrela, erregresioaren *ekuazio normalak* eskuratzen dira:

$$\frac{\partial \sum_i (y_i - a - b x_i)^2}{\partial a} = 0 \rightarrow \sum_i y_i = n a + b \sum_i x_i$$
$$\frac{\partial \sum_i (y_i - a - b x_i)^2}{\partial b} = 0 \rightarrow \sum_i x_i y_i = a \sum_i x_i + b \sum_i x_i^2$$

Nola eratu zuzena?

Aurreko bi ekuazioak ebatziz, honela zenbatetsi edo estimatzen dira a eta b parametroak:

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Doikuntzaren egokitasuna

Karratu txikiaren erregresioan berdintza hau betetzen da:

$$s_y^2 = s_{\hat{y}}^2 + s_e^2$$

s_y^2 bariantza totala da, erregresio-zuzenak x aldagaiaren bitartez esplikatzea helburu duguna. $s_{\hat{y}}^2$ bariantza azaldua da, x -rekiko erregresioaren bitartez azaltzen dugun y aldagaiaren bariantzaren zatia, eta s_e^2 erroreen bariantza, x -rekiko erregresioaz azaltzen ez dugun zatia. Beraz:

bariantza totala = bariantza azaldua + azaldu gabeko bariantza

Doikuntzaren egokitasuna: ingelesez, *goodness of fit*; gazteleraz, *bondad de ajuste*.

Doikuntzaren egokitasuna

Beraz, bariantza totala bati buruz, bariantza azaldua zenbat eta handiago izan, erregresio-zuzena orduan eta hobeto doitu da datuetara. Hargatik, doikuntzaren egokitasun neurri gisa *mugatze-koefizientea* izeneko eratzten da:

$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_e^2}{s_y^2}$$

R^2 : ingelesez, *coefficient of determination*.

Doikuntzaren egokitasuna

$[0, 1]$ tarteko balioak hartzen ditu eta honelako erregela erabil daiteke interpretaziorako, lagin-errorearen eta antzeko ikerketen erreserbapean:

- $0 < R^2 < 0.3 \rightarrow$ doikuntza eskasa;
- $0.3 < R^2 < 0.6 \rightarrow$ doikuntzaren kalitatea ertaina;
- $R^2 > 0.6 \rightarrow$ doikuntzaren egokitasun handia;
- $R^2 = 1 \rightarrow$, doikuntza erabatekoa: puntu guztiak lerrokatuta daude.

Doikuntzaren egokitasuna

Erregresio-zuzenaren bi propietate hauek erraztu egiten dute mugatze-koefizientearen kalkulua:

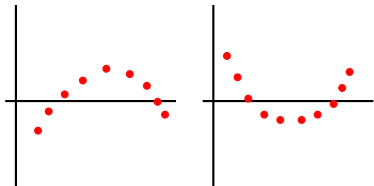
- $\sum_i e_i = 0 \rightarrow \bar{e} = 0 \rightarrow s_e^2 = \frac{\sum_i e_i^2}{n};$
- $\sum_i y_i = \sum_i \hat{y}_i \rightarrow \bar{y} = \bar{\hat{y}}.$

Erregresioaren diagnostika: errore-diagramak

Errore-diagrama kartesiar-diagrama besterik ez da, abzisa-ardatzean x_i aldagaiaren balioak eta ordenatu-ardatzean e_i erroreenak jartzen dituen.

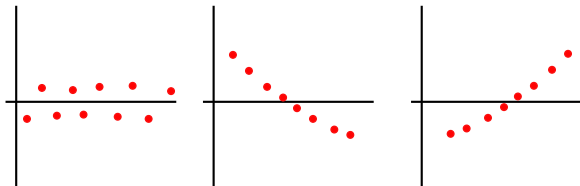
Zertarako erabiltzen da? a eta b parametroen formulak erabiltzean, hipotesi edo baldintza teoriko batzuk suposatzen dira inplizituki. Erroreen diagrama hipotesi horiek betetzen diren frogatzeko, ereduaren diagnostika egiteko alegia, erabiltzen da.

Nola interpretatu errore-diagrama?



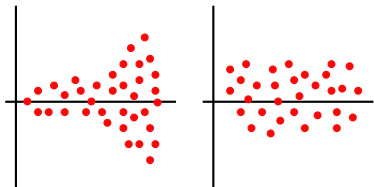
Irudia: Zehaztapen-errorea: lerro desegokia aukeratu da; adibidez, zuzenaren ordez, kurba bat doitzea litzateke egokiena. Zantzu txarra da, beraz.

Nola interpretatu errore-diagrama?



Irudia: Autokorrelazioa: ondoz ondoko erroreak loturik daude. Zantzu txarra da.

Nola interpretatu errore-diagrama?



Irudia:

- Erroreen sakabanatze desberdina: **heteroskedastikotasuna** (zantzu txarra).
- Erroreen sakabanatze berdina: **homoskedastikotasuna** (zantzu ona).

Nola interpretatu errore-diagrama?

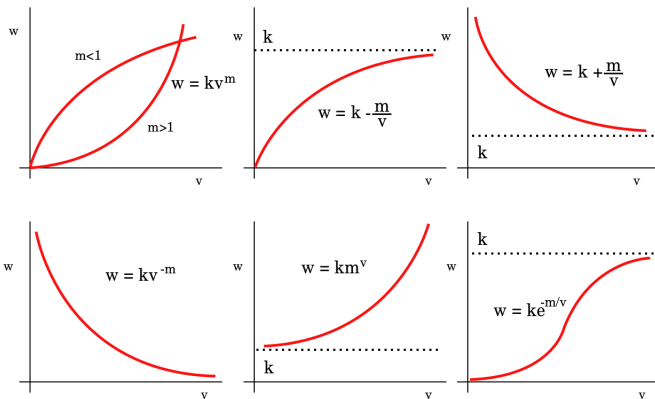
Erregresio-eredua ontzat emateko, errore-diagraman erroreak zoriz edo modu kaotikoan banatuak izan behar dira orokorrean, joera garbirik gabe.

Eredu ez-linealak

Erregresio-zuzen bat doitzen ikasi dugu. Nola doitu erregresio-kurba bat?

Orokorrean, kurba linealizatu egingo dugu, zuzen bihurtu alegia, eta zuzeneko a eta b zenbatetsi ondoren, kurbara itzuliko gara ostera.

Eredu ez-linealak: kurba-katalogoa



Eredu ez-linealak: katalogoko kurben linealizazioa

Lerroa	Linealizazioa ($y = a + bx$)	a	b
$w = kv^m$	$\ln w = \ln k + m \ln v$	$a = \ln k$	$b = m$
$w = k - \frac{m}{v}$	$w = k + (-m) \frac{1}{v}$	$a = k$	$b = -m$
$w = k + \frac{m}{v}$	$w = k + m \frac{1}{v}$	$a = k$	$b = m$
$w = kv^{-m}$	$\ln w = \ln k + (-m) \ln v$	$a = \ln k$	$b = -m$
$w = km^v$	$\ln w = \ln k + (\ln m)v$	$a = \ln k$	$b = \ln m$
$w = ke^{-\frac{m}{v}}$	$\ln w = \ln k + (-m) \frac{1}{v}$	$a = \ln k$	$b = -m$

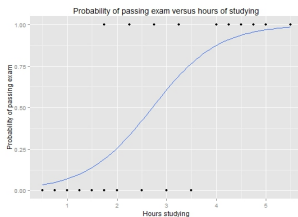
Eredu ez-linealak: mugatze-koefizientearen kalkulua

Erregresio-kurba baten mugatze-koefizientea forma linealizatuarekin kalkulatu behar da, alegia, y balio errealak, aurreanak eta erroreak zuzenari buruz kalkulatu behar dira. Hala egiten ez bada, mugatze-koefizientea ez da $[0,1]$ tartera mugatuko.

Logit erredua

Logit erredua edo **erregresio logistikoa** erregresio-kurba berezia da, non aldagai independentea *dosi* izeneko aldagai bat den, eta dependentea, zerbait gertatzeko *probabilitatea* adierazten duena. Beraz, aldagai dependentea probabilitatea denez, bere balioak [0-1] tartera mugatuak behar dira izan.

Ohiko eran, zenbat eta dosi handiagoa, orduan eta probabilitate handiagoa dago.



Logit erdua

Aurreko adibidean kurba logistiko tipiko bat azaltzen da. Ordenatu-ardatzean balioak $[0,1]$ tartera mugatzen dira, probabilitate batez ari garenez gero. Bestalde, probabilitate-gehikuntza gehienak dosi-kopuru tarte batean gertatzen dira. Dosi oso txikietarako edo handietarako probabilitatearen aldaketa oso txikia da (adibidez, muga batetik aurrera, asko estudiatuta ere ez duzu aprobatzeko probabilitatea askoz ere handiagoa izango). Kurba logistikoaren asintota horizontalen ondorioa da hori ($y = 0$ eta $y = 1$ lerroetan).

Logit erdua

x dosia eta p probabilitate izanik, hau da kurba logistikoaren forma linealizatua:

$$\ln \left(\frac{p}{1-p} \right) = a + bx$$

Bestalde, edozein erregresio-kurbatan bezalaxe, mugatze-koefizientea aurreko forma linealizatuan oinarrituta kalkulatu behar da.