

Probabilitate-teoria

Xurgapen-denborak Markov kateetan

Josemari Sarasola

Gizapedia



Zer den Markov kate bat

Markov kate bat egoera diskretuen multzo bat da, batetik bestera pasatzeko probabilitate jakinekin. Probabilitate horiei trantsizio-probabilitate deitzen zaie, **eta azken egoeraren mendean daude beti**. Adibidez, egunak euritsu-ateri (e/a) sailkatzen dira, eta egun bateko eguraldia bezperako eguraldian mendean dago soilik.

Trantsizio-matrizeak

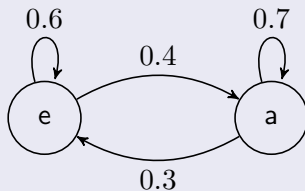
Markov kateak trantsizio-matrizeen bitartez definitzen dira, non i egoera batetik j egoera batera igarotzeko p_{ij} probabilitateak zehazten diren, i egoeraren mendean soilik. Adibidez, eguraldiaren adibidea harturik:

$$\begin{aligned} p_{ea} &= 0.4 & p_{ee} &= 0.6 \\ p_{aa} &= 0.7 & p_{ae} &= 0.3 \end{aligned}$$

Esate baterako, bezpera euritsua izanda, biharamunean ateri izateko probabilitatea 0.4 da. Horrela definituta, errenkadako baturak 1 izan behar dira beti.

Markov kateak grafo baten bitartez

Markov kateak grafo baten bitartez ere irudikatu daitezke:



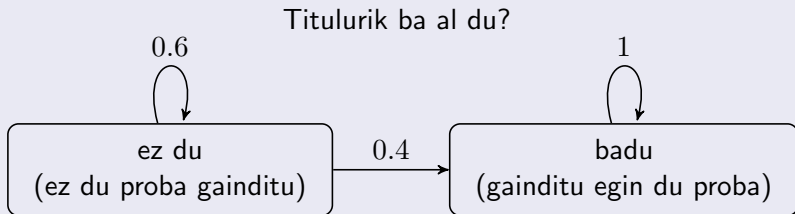
Xurgatze-egoerak

Markov kate batean egoera bat xurgatze-egoera dela esaten da, bertara iritsita bertatik ezin denean atera.

Beste era batera esanda, i egoera xurgatze-egoera da $p_{ii} = 1$ betetzen denean.

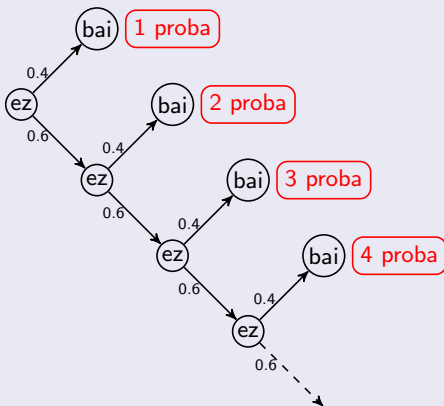
Xurgatze-egoerak (1. adibidea)

Adibidez, ikasle batek titulu bat eskuratzeko proba egiten du behin eta berriz harik eta gainditzen duenera arte. Behin gaindituta, inork ez dio titulua kenduko: gainditu eta titulua izatea xurgatze-egoera da. Azterketa aprobatzeko probabilitatea 0.4 bada, honela irudikatzen da dagokion Markov katea:



Batez besteko xurgatze-denborak

Zenbat aldiz burutu behar da proba batezbeste titulua lortu arte? Probabilitate-zuhaitz bat era dezakegu (gorriz titulua lortu arte zenbat proba burutzen diren adierazten da):



Batez besteko xurgatze-denborak

Eman dezagun titulua lortu arteko proba kopuruaren batezbestekoa:

Probak (x)	Probabilitatea ($p(x)$)	$xp(x)$
1	0.4	1×0.4
2	0.6×0.4	$2 \times 0.6 \times 0.4$
3	$0.6^2 \times 0.4$	$3 \times 0.6^2 \times 0.4$
4	$0.6^3 \times 0.4$	$4 \times 0.6^3 \times 0.4$
...
	1	$\sum t \times 0.6^{(t-1)} \times 0.4$

Batez besteko xurgatze-denborak

Alde batetik, serie aritmetiko-geometriko honen batura burutuz (batura baten deribatua deribatuen batura da):

$$\sum tx^{t-1} = \sum \frac{dx^t}{dx} = \frac{d \sum x^t}{dx} = \frac{d \frac{1}{1-x}}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Gure seriea aplikatuz:

$$\sum t \times 0.6^{(t-1)} \times 0.4 = 0.4 \sum t \times 0.6^{(t-1)} = \frac{0.4}{(1-0.6)^2} = 2.5$$

Beraz, batezbeste 2.5 proba beharko ditu ikasleak titulua lortzeko.

Batez besteko xurgatze-denborak

Aurreko kalkulu konplexuak (adibide guztiz sinplea dela kontuan hartuta gainera) saihesten dituen metodoa ere badago. Titulua lortzeko proba kopuru hauek burutu behar ditu:

- proba bakarra, 1, proba gainditzen badu;
- proba bat (egin duena) gehi berriz ere batezbeste behar duena titulua lortzeko ($E[T_{ez \rightarrow bai}]$)

$T_{ez \rightarrow bai}$	$p[T_{ez \rightarrow bai}]$	$Tp[T]$
1	0.4	0.4
$1 + E[T_{ez \rightarrow bai}]$	0.6	$0.6 + 0.6E[T_{ez \rightarrow bai}]$
	1	$E[T_{ez \rightarrow bai}] = 1 + 0.6E[T_{ez \rightarrow bai}]$

Batez besteko xurgatze-denborak

Azkenean ekuazio guztiz sinplea geratzen zaigu:

$$E[T_{ez \rightarrow bai}] = 1 + 0.6E[T_{ez \rightarrow bai}]$$

$$0.4E[T_{ez \rightarrow bai}] = 1$$

$$E[T_{ez \rightarrow bai}] = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

Ikusten denez, metodo honekin askoz ere sinpleago lortzen dugu azken emaitza.

Xurgatze-egoerak: ariketak

1: Txanpon bat jaurtitzen da XOO sekuentzia, ordena horretan, suertatu arte. Zenbat aldiz jaurti behar da batezbeste?

Xurgatze-egoerak: ariketak

2: Akzio baten igoera edo jaitsiera egun batean aurreko eguneko bilakaeraren mendean dago trantsizio matrize honen arabera:

$$p(\uparrow\uparrow) = 0.4 ; p(\uparrow\downarrow) = \dots$$

$$p(\downarrow\uparrow) = 0.7 ; p(\downarrow\downarrow) = \dots$$

Adibidez, akzioak gora egin bazuen, gaur ere gora egiteko probabilitatea 0.4 da. Akzio batek bi egunetan jarraian gora egiten badu, akzio horren salerosketak egun batez eteten dira. Bi egunetan jarraian behera egiten badu berriz, bi egunez eteten dira. Atzo akzioaren kotizazioa etenda egon zen, gora egin ondoren. Zenbat egun pasako dira batezbestez hiru egunetan jarraian gora egiteko?

Xurgatze-egoerak: ariketak

3: Merkatu batean hiru markak jarduten dute. C marka liderra da, horrenbestera non kontsumitzaile batek marka hori erosita, ja ez du aurrerantzean bestelako markarik erosiko. A eta B markako mugikorren iraupen-bizitzak 2 eta 3 urtekoak dira. Trantsizio matrizea hau da:

$$p(aa) = 0.2 ; p(ab) = 0.5 ; p(ac) = 0.3$$

$$p(ba) = 0.1 ; p(bb) = 0.3 ; p(bc) = 0.6$$

$$p(ca) = \dots ; p(cb) = \dots ; p(cc) = \dots$$

Kalkulatu c marka erosi arteko batezbesteko denbora, bi kasu hauetan: (i) a mugikorra dauka baina segituan berrituko du; (ii) b mugikorra dauka baina segituan berrituko du.