Xurgatze-denborak Markov kateetan

Problema ebatziak

Egilea : Josemari Sarasola

Gizapedia

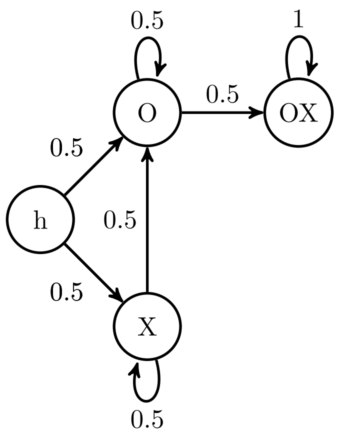
gizapedia.hirusta.io

XURGATZE-DENBORAK MARKOV KATEETAN

Josemari Sarasola

1. problema Txanpon bat jaurtitzen da OX sekuentzia, ordena horretan, suertatu arte. Zenbat aldiz jaurti behar da batezbeste?

Dagokion Markov katea irudika dezagun (h: hasiera):

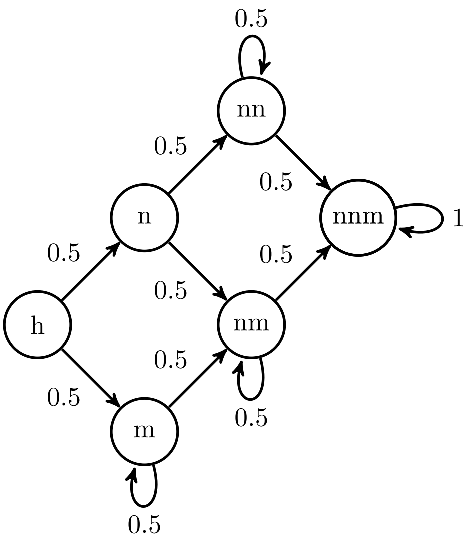


Ekuazioak eman ditzagun:

$$(1):\quad E[T_{h\to OX}] = 0.5(1+E[T_{O\to OX}]) + 0.5(1+E[T_{X\to OX}])$$
$$(2):\quad E[T_{X\to OX}] = 0.5(1+E[T_{O\to OX}]) + 0.5(1+E[T_{X\to OX}])$$
$$(3):\quad E[T_{O\to OX}] = 0.5(1+E[T_{O\to OX}]) + 0.5\times 1$$

(3) ekuaziotik: $E[T_{O\to OX}] = 2$
(2) ekuazioan ordeztuz eta bakanduz: $E[T_{X\to OX}] = 4$
(1) ekuaziora aldatuz: $E[T_{h\to OX}] = 4$.

2. problema Bikote bat gutxienez bi neska eta mutil bat izan arte ugaltzen da. Zenbat haur izan behar ditu horretarako batezbeste?



$$(1):\quad E[T_{h\to nnm}] = 0.5(1+E[T_{n\to nnm}]) + 0.5(1+E[T_{m\to nnm}])$$
$$(2):\quad E[T_{n\to nnm}] = 0.5(1+E[T_{nn\to nnm}]) + 0.5(1+E[T_{nm\to nnm}])$$
$$(3):\quad E[T_{nn\to nnm}] = 0.5(1+E[T_{nn\to nnm}]) + 0.5\times 1$$
$$(4):\quad E[T_{nm\to nnm}] = 0.5(1+E[T_{nm\to nnm}]) + 0.5\times 1$$
$$(5):\quad E[T_{m\to nnm}] = 0.5(1+E[T_{m\to nnm}]) + 0.5(1+E[T_{nm\to nnm}])$$

Ebazpen-prozesua hau da:

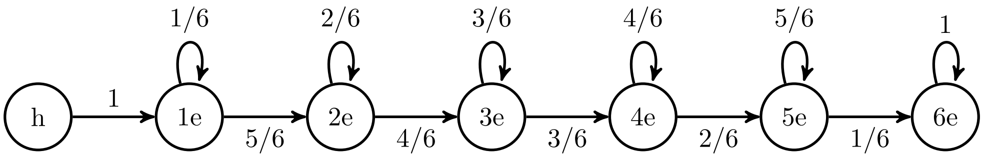
- (3)tik $E[T_{nn\to nnm}] = 2$
- (4)tik $E[T_{nm\to nnm}] = 2$
- (2)tik $E[T_{n\to nnm}] = 0.5 \times (1+2) + 0.5 \times (1+2) = 3$
- (5)etik $E[T_{m\to nnm}] = 0.5(1 + E[T_{m\to nnm}]) + 0.5 \times 3 \to E[T_{m\to nnm}] = 4$
- (1)etik $E[T_{h\to nnm}] = 0.5(1 + E[T_{n\to nnm}]) + 0.5(1 + E[T_{m\to nnm}]) = 0.5 \times 4 + 0.4 \times 5 = 4.5$

Beraz, batezbeste 4.5 haur eduki behar ditu bi neska eta mutil bat izan arte.

---

3. problema Dado bat jaurtitzen da harik eta zenbaki guztiak atera arte. Zenbat aldiz jaurti behar da batezbeste?

Kodifikazio hau egiten dugu: 1e, ”zenbaki ezberdin bat”; 2e, ”zenbaki ezberdin bi”; ...



Ekuazioak:

(1): $E[T_{h\to 6e}] = 1 + E[T_{1e\to 6e}]$

(2): $E[T_{1e\to 6e}] = \frac{1}{6}(1 + E[T_{1e\to 6e}]) + \frac{5}{6}(1 + E[T_{2e\to 6e}])$

(3): $E[T_{2e\to 6e}] = \frac{2}{6}(1 + E[T_{2e\to 6e}]) + \frac{4}{6}(1 + E[T_{3e\to 6e}])$

(4): $E[T_{3e\to 6e}] = \frac{3}{6}(1 + E[T_{3e\to 6e}]) + \frac{3}{6}(1 + E[T_{4e\to 6e}])$

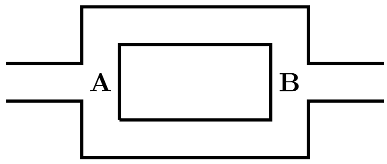
(5): $E[T_{4e\to 6e}] = \frac{4}{6}(1 + E[T_{4e\to 6e}]) + \frac{2}{6}(1 + E[T_{5e\to 6e}])$

(6): $E[T_{5e\to 6e}] = \frac{5}{6}(1 + E[T_{5e\to 6e}]) + \frac{1}{6} \times 1$

(6) ekuazioa zuzenean ebatziz eta atzerakoetan ordeztuz:

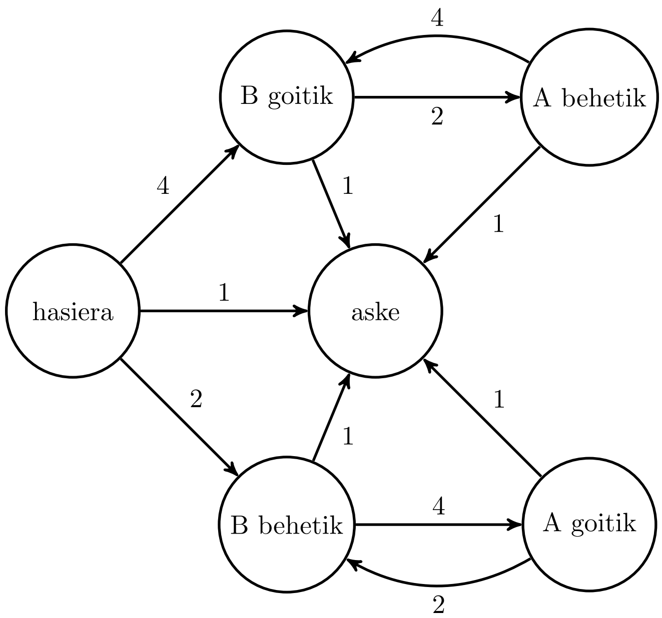
$E[T_{5e\to 6e}] = 6$
$E[T_{4e\to 6e}] = 9$
$E[T_{3e\to 6e}] = 11$
$E[T_{2e\to 6e}] = 12.5$
$E[T_{1e\to 6e}] = 13.7$
$E[T_{h\to 6e}] = 14.7$

4. problema Teseo, Atenasko erregea, Kretako labirintoan dago. A puntura eraman dute begiak itxita. Han hiru bide ditu aukeran. Atik Bra goitik badoa, 4 egun emango ditu Braino. Behetik berriz, 2 egun behar ditu. B puntuan ere hiru bide ditu aukeran. A eta B puntuetatik kanpora irteteko egun bakarra behar du. Zenbat denbora beharko du batezbeste kanpora irteteko? (a) Bidegurutzeetan Teseok ez du inoiz atzera egiten; (b) atzera ere egin dezake.



(a) Teseok ez du inoiz atzera egiten

Probabilitate guztiak 1/2, hasieratikakoak ezik, non 1/3 diren. Egoera xurgakorreko begizta (barrurako gezia) ez da irudikatu.



Ekuazioen notazioa sinplifikatzeko:

- Itxaropenaren $E[\ \ ]$ ikurra ez da adieraziko.
- Kodifikazio hau erabiltzen da: Bg, B goitik; Bb, B behetik; Ab, A behetik; Ag, A goitik; a, aske; h, hasiera.

Hemen dira ekuazioak:

- (1) $T_{h/a} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3}(4 + T_{Bg/a}) + \frac{1}{3}(2 + T_{Bb/a}) = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}T_{Bg/a} + \frac{1}{3}T_{Bb/a}$
- (2) $T_{Bg/a} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2}(2 + T_{Ab/a}) = 1.5 + 0.5T_{Ab/a}$
- (3) $T_{Bb/a} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2}(4 + T_{Ag/a}) = 2.5 + 0.5T_{Ag/a}$
- (4) $T_{Ab/a} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2}(4 + T_{Bg/a}) = 2.5 + 0.5T_{Bg/a}$
- (5) $T_{Ag/a} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2}(2 + T_{Bb/a}) = 1.5 + 0.5T_{Bb/a}$

Ekuazio horien ebazpena egin dezagun:

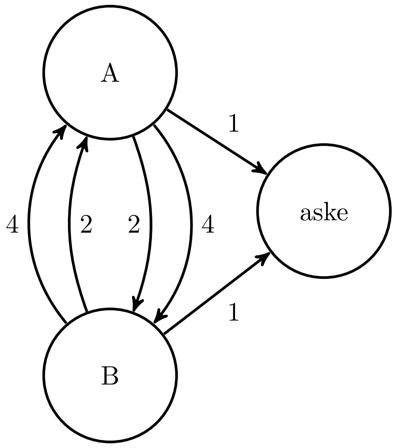
(2) eta (4) ekuazioetatik: $T_{Bg/a} = 3.66$ eta $T_{Ab/a} = 4.33$.

(3) eta (5) ekuazioetatik (ekuazio baliokideak dira): $T_{Ag/a} = 3.66$ eta $T_{Bb/a} = 4.33$.

Eta horrela, (1) ekuaziora igaroz: $T_{h/a}\frac{7}{3} + \frac{1}{3} \times 3.66 + \frac{1}{3}4.33 = 5\ egun$

(a) Teseok atzera egin dezake

Probabilitate guztiak 1/3 dira.



Hemen dira ekuazioak:

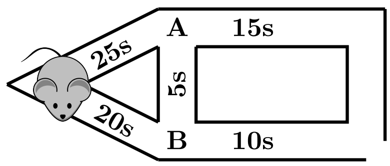
- (1) $T_{A/a} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3}(4 + T_{B/a}) + \frac{1}{3}(2 + T_{B/a}) \to T_{h/a} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} T_{B/a}$
- (1) $T_{B/a} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3}(4 + T_{A/a}) + \frac{1}{3}(2 + T_{A/a}) \to T_{B/a} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} T_{A/a}$

Horietatik:

$$T_{A/a} = 7$$

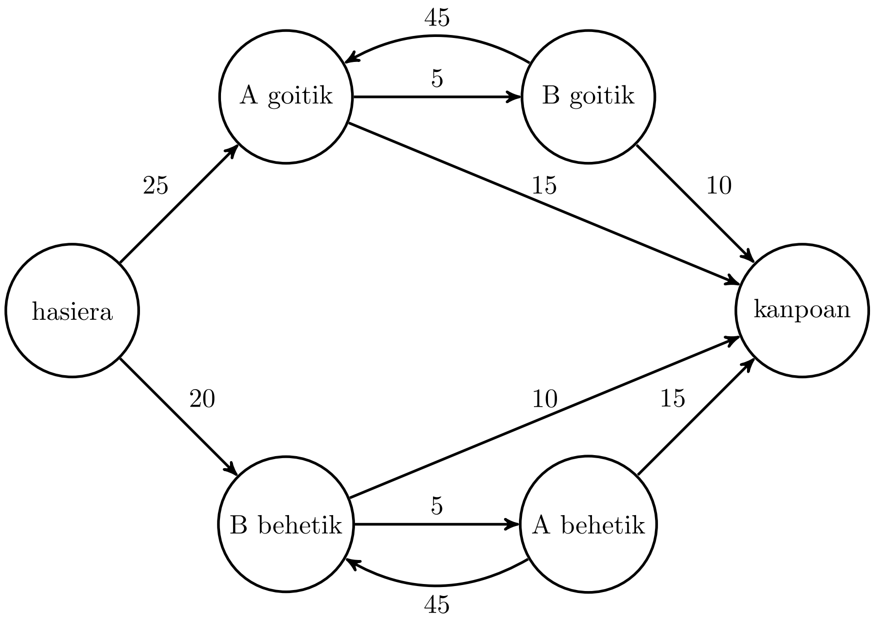
Ohartzekoa da $T_{B/a} = 7$ dugula baita ere, Teseo Atik abiatuta, Btik aske geratu arte denbora luzexeagoa beharko lukeela uste daitekeen arren (arrazoia hau da: Atik aldi bakoitietan ateratzen gara, eta Btik bikoitietan, eta beraz denboren baturak berdinak izango dira).

5. problema **Xagu bat labirinto batean sartu dute. A eta B bidegurutzeetan zoriz aukeratzen du bidea. Utzi duten puntuan hasieran bakarrik aukeratzen du A edo Bra joatea, hurrengoetan beti aurrera egiten du puntu horretatik igarotzean. Zenbat denbora beharko du batezbeste kanpora irteteko? (a) Bidegurutzeetan xaguak ez du inoiz atzera egiten; (b) atzera ere egin dezake.**



Xaguak ez du inoiz atzera egiten

Ondoko grafoan trantsizio-probabilitate guztiak 1/2 dira. Denborak bakarrik irudikatzen dira:



Xaguak atzera egin dezake

Ondoko grafoan trantsizio-probabilitate guztiak 1/3 dira, abiapuntuko trantsizioetan ezik, non 1/2 diren. Denborak bakarrik irudikatzen dira: